Revista Internacional de
Ingeniería
de Estructuras

Vol. 24, 1, 1-38 (2019)

EFFECTIVE STIFFNESS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS FOR SEISMIC DESIGN: MYTHS AND FACTS

Arturo Tena Colunga

Profesor, Departamento de Materiales, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco,
Edificio P4, 3er Piso, Av. San Pablo # 180, 02200 Ciudad de México.
Correo electrónico: atc@correo.azc.uam.mx.

Received: January 2019. Accepted: March 2019

ABSTRACT

The stiffness of any structural element depends on its geometrical form (prismatic or nonprismatic), its length, its supporting conditions and its mechanical properties in function of the constitutive laws which are assumed that the used material satisfies. For this reason, in the most general case, the stiffness of any element is obtained using a volume integral. Although this fundamental principle of analysis should be clear to any structural engineer, it seems than in recent years this is not the case for reinforced concrete beams, since many reinforced concrete codes worldwide are recommending to use an effective stiffness by reducing the moment of inertia of the cross section, particularly for beams. In most reinforced concrete codes worldwide, it is recommended to reduce the moment of inertia of beams to 50% the one of the gross section or even less when an elastic analysis is used, to account for the first yielding. Surprisingly as it may seem, most reinforced concrete codes do not mention anything about the variability of the modulus of elasticity for the concrete in the assessment of the stiffness of reinforced concrete elements. Then, in this paper the author discusses and reflects, in an integral way, the subject of effective stiffness for reinforced concrete beams in the seismic design practice, based upon analytical results and experimental evidence. Simplified equations were derived to assess in a rational way effective stiffnesses in reinforced concrete members if the designer wants to assume that an incipient cracking (not easy to detect at first sight) before the design earthquake scenario strikes the subject structure.

Keywords: reinforced concrete; effective sections, cracked sections, elastic modulus, code-oriented seismic design.

RIGIDECES EFECTIVAS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO PARA DISEÑO SÍSMICO: MITOS Y REALIDADES

RESUMEN

La rigidez de cualquier elemento estructural depende principalmente de su forma (prismática o de sección variable), de su longitud, de sus condiciones de apoyo y de sus propiedades mecánicas en función de las relaciones constitutivas que se supone que, para fines prácticos, satisface el material con que está hecho. Por ello, la rigidez de cualquier elemento estructural se obtiene a partir de integrar

todas estas propiedades a lo largo del elemento y en todo su volumen. Aunque este fundamento de análisis debiera serle claro a cualquier ingeniero estructural, parece que en tiempos recientes se es poco reflexivo en este aspecto de cara a la recomendación disponible en diversos reglamentos de concreto reforzado en considerar para análisis "elásticos" y, para "fines de diseño", secciones "efectivas" donde la inercia promedio de la viga es de 50% o menos de la inercia de la sección gruesa debido al "agrietamiento" asociado a la primera fluencia del refuerzo longitudinal. Curiosamente, la mayoría de los reglamentos de concreto reforzado no mencionan nada con respecto a la variabilidad del módulo de elasticidad del concreto en la estimación de las rigideces efectivas de los elementos de concreto. Por ello, en este artículo el autor discute y reflexiona sobre este tema relacionado a la práctica de diseño sismorresistente de manera integral, apoyado tanto en resultados analíticos, como en evidencia experimental. Se presenta además ecuaciones simplificadas, pero racionales, en caso de querer tomar rigideces efectivas en secciones de concreto si se considera que puede ocurrir algún tipo de agrietamiento (no detectado a simple vista) antes de que se presente un sismo intenso asociado a su diseño.

Palabras clave: concreto reforzado; secciones efectivas, secciones agrietadas, módulo de elasticidad, diseño sísmico conforme a reglamento.

1 INTRODUCCIÓN

Ante los hechos y la cruda realidad de lo sucedido y observado durante los sismos muy severos ocurridos en la presente década en Chile, Ecuador y México, los ingenieros civiles latinoamericanos debemos tener autocrítica y mayor conciencia social para entender que el diseño sismorresistente de estructuras en zonas de alto riesgo y peligro sísmicos representa una enorme responsabilidad que debemos asumir con total profesionalismo, ética y sensibilidad social para servir a nuestra sociedad como se merece, haciendo el trabajo de calidad que la sociedad espera de nosotros.

Dentro de este proceso, las hipótesis que se hacen en el análisis de estructuras y una razonable o correcta interpretación de los resultados obtenidos para la toma de decisiones en el diseño son de gran importancia, entre otros factores relevantes asociados al proceso del diseño sismorresistente *per se*. Por ello, los ingenieros civiles tenemos que tomar muy en serio nuestro trabajo y tener siempre presente las fortalezas y limitaciones de los métodos de análisis, las implicaciones de nuestros hipótesis y simplificaciones en el proceso de diseño, y no tomar estos asuntos a la ligera, con poco criterio o con falta de compromiso, desde fundamentos muy básicos, hasta conceptos que pueden resultar un poco más avanzados.

Las estructuras de concreto reforzado son de las más empleadas en nuestros países. Sin embargo, en opinión del que escribe: a) existe poco reflexión en el proceso de diseño acerca de la gran variabilidad de las propiedades mecánicas del concreto bajo un modelado elástico lineal, homogéneo e isotrópico, particularmente en el módulo de elasticidad y, b) existen recomendaciones de análisis en los reglamentos de concreto reforzado para calcular "rigideces efectivas" de elementos como vigas, columnas y muros, cuyos fundamentos y orígenes no son del todo transparentes y su aplicabilidad debatible, si se considera integralmente el proceso de diseño sismorresistente.

Por ello, en las siguientes secciones se discuten estos dos temas con mayor detalle y sus implicaciones en el diseño sismorresistente de estructuras de concreto, con la intención de ser más reflexivos en estos temas de manera que, en el futuro cercano, se tomen mejores decisiones que lideren a diseño sísmicos más racionales y confiables de estructuras de concreto reforzado en zonas sísmicas, intentando además que este diseño sísmico sea resiliente, es decir, abandonar el diseño para el estado último de prevención de colapso.

2 MÓDULO DE ELASTICIDAD DEL CONCRETO

Antes de entrar en la materia de discutir el módulo de elasticidad del concreto *per-se*, no está de más recordar que uno de los tres principios en que se fundamenta el análisis estructural son las relaciones constitutivas (además de el equilibrio y la continuidad, por ejemplo, Tena 2007). Se conocen como relaciones constitutivas o modelos constitutivos a las ecuaciones que relacionan a los esfuerzos que se desarrollan dentro de un elemento o cuerpo con sus respectivas deformaciones internas. Existe un gran número de modelos constitutivos para el análisis de elementos estructurales, dependiendo si el comportamiento del material se supone elástico o inelástico, y si el material va a estar sujeto a cargas estáticas de corta duración, cargas estáticas de larga duración, cargas dinámicas, explosiones, impactos u otras.

Por décadas, el modelado más empleado en la práctica del análisis y diseño de estructuras es suponer en los análisis que los elementos estructurales tienen un comportamiento elástico lineal, homogéneo e isotrópico, pues éstas son las cuatro hipótesis que cumplen las formulaciones de la enorme mayoría de los elementos de las librerías de los programas de análisis estructural comerciales desde los años noventa. Sin embargo, cabe señalar que desde los años ochenta existen programas que han permitido emplear otros modelos constitutivos con comportamiento elástico, como es el modelado homogéneo y ortótropo (Cook y Young 1985, Abaqus 1989) e incluso, software comercial muy empleado en el mundo México para el análisis estructural, particularmente en el continente americano, permite hacer este tipo de modelado desde hace ya muchos años, además de permitir un modelado totalmente anisotrópico (CSI 2005).

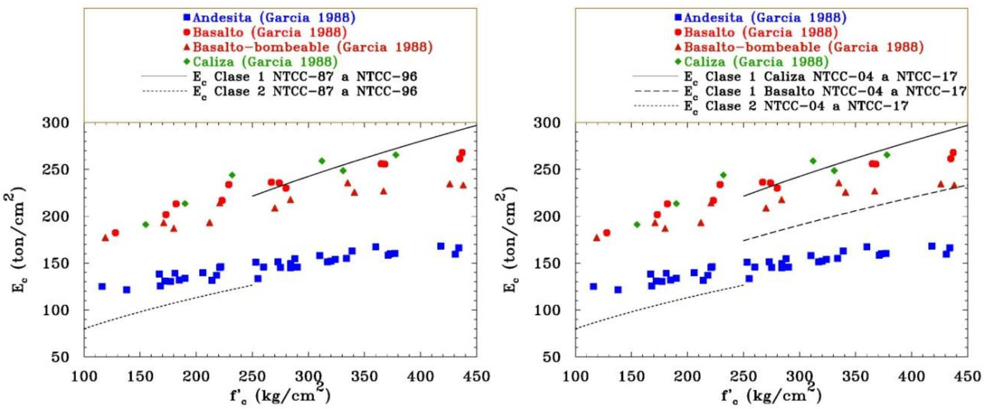
Muchos ingenieros están acostumbrados y se refieren a este tipo de análisis (elástico lineal homogéneo e isotrópico) como un “análisis elástico” o un “análisis lineal”. *Per se*, ese no es el problema principal, sino que muchos piensan erróneamente, en automático, que todo análisis elástico debe ser forzosamente lineal, que no existen otras opciones (por ejemplo, análisis elástico no lineal) y, todavía peor, no están conscientes que las hipótesis claves de las constantes constitutivas (módulo de elasticidad, relación de Poisson y módulo de rigidez a cortante) que se usan para obtener a los coeficientes de flexibilidad o rigidez de los distintos elementos que emplean, dependen tanto de que el material sea homogéneo, como el que su comportamiento se suponga isotrópico (que sus propiedades son independientes de la dirección) y que, además, las deformaciones deben ser pequeñas. Es por ello que en ocasiones no se razona con suficiente profundidad que esta teoría elástica es aplicable sólo con rigor a materiales 100%

homogéneos (principalmente los metales), que es muy razonable en aleaciones (por ejemplo, el acero), pero no lo es tanto para otros materiales no homogéneos que se emplean en las estructuras, como el concreto, la madera y la mampostería. Además, estos tres últimos materiales distan mucho de desarrollar un comportamiento isotrópico.

Es bien conocido que el concreto (y sus distintas variantes: concreto reforzado, concreto presforzado, concreto con fibras, concreto reciclado, etc.) es un material que no es homogéneo y menos isotrópico, por lo que los resultados obtenidos bajo esta modelación constituyen aproximaciones que deben valorarse con mucho juicio, sobre todo cuando se toman decisiones de diseño para definir refuerzos, revisar desplazamientos, etc. Sin embargo, es un hecho irrefutable que esto no está presente en la mente de muchos diseñadores, los cuales están más preocupados en “ahorrar acero de refuerzo”, llevando el diseño de la estructura “a la máxima distorsión (deriva) de entrepiso permitida” para obtener diseños más económicos, por lo que hacen diseños muy justos con base en los resultados de este modelado aproximado. Definitivamente, el autor lamenta mucho este tipo de práctica y sospecha que, en muchas ocasiones, está relacionada con malos comportamientos observados en estructuras de concreto reforzado, tanto ante cargas de servicio, como ante cargas accidentales.

Relacionado con este tema está el poco entendimiento que existe en una enorme mayoría de ingenieros estructuristas con respecto a la importante variación de lo que, de manera práctica, se define como módulo de elasticidad del concreto (E_c). Como se explica perfectamente en textos clásicos de tecnología del concreto (Neville 1963), el concreto es solamente, hasta cierto grado de deformación, “elástico” y este módulo secante depende fuertemente de variables como la naturaleza, forma y granulometría de los agregados utilizados (grueso y fino), la relación agua-cemento, la dosificación de la mezcla, el tipo de curado (con o sin control de humedad), la existencia o ausencia de pequeñísimos huecos internos por aire atrapado o porque el mezclado no fue uniforme, el impacto del empleo de aditivos, etc. Sin embargo, el que escribe tiene la percepción que muchos ingenieros realmente creen ciegamente que existe una relación casi perfecta entre el módulo de elasticidad del concreto (E_c) con la resistencia índice a la compresión del concreto (f'_c) y con las constantes recomendadas en las normas de concreto internacionales. En México, pocos ingenieros estructuristas cuestionan siquiera la validez de las ecuaciones propuestas para el módulo de elasticidad en los Reglamentos para las Construcciones de la Ciudad de México vigentes después del sismo del 19 de septiembre de 1985 (NTCC-87, 1987, NTCC-96 1996). Como lo demostraron expertos mexicanos en tecnología del concreto desde 1988, esto no es del todo cierto. Para ello, se presentaron los resultados de pruebas experimentales de una muestra razonablemente amplia de cilindros de concreto (García 1988), empleando los materiales disponibles en el Valle de México para producir concretos por las grandes compañías premezcladoras de la época: a) gravas andesíticas, basálticas y calizas disponibles de bancos de la Ciudad de México, del Estado de México y de Querétaro, b) arenas andesíticas disponibles en la Ciudad de México y el Estado de México y, c) las dosificaciones más comúnmente empleadas por las principales compañías premezcladoras en el Valle de México para dar las resistencias índice a la compresión f'_c que eran solicitadas en las obras en esa época, tanto para concreto normales como para concretos bombeables, que llevan aditivos.

En la Figura 1a se muestran los datos experimentales reportados por García (1988), y se comparan con las ecuaciones propuestas en las NTCC-87 (1987) para concreto clase 1 ($E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c}$) y para concreto clase 2 ($E_c = 8{,}000\sqrt{f'_c}$). De la observación de la Figura 1a, resulta muy claro el impacto que tiene la naturaleza del agregado grueso (andesita, basalto y caliza), pues para dar una misma resistencia f'_c objetivo de diseño, la diferencia en el módulo de elasticidad puede ser muy grande. Igualmente, si se comparan los datos para agregado basáltico para una dosificación de concreto normal y uno bombeable (que emplea aditivos), se aprecia que es menos rígido el concreto bombeable (E_c siempre es menor, no importado que el agregado basáltico provenga del mismo banco). Este hecho no era reconocido en las NTCC-87, pues la definición de un concreto clase 1 dependía exclusivamente de su resistencia índice a la compresión (f'_c≥250 kg/cm^2) y, si esto se cumplía, se debía diseñar considerando en automático que $E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c}$.



a) Comparación con NTCC-87 y NTCC-96

b) Comparación con NTCC-04 y NTCC-17

Figura 1 Variación del módulo de elasticidad del concreto (E_c) con la resistencia índice a la compresión del concreto (f'_c) de las pruebas realizadas a los 28 días y reportadas por García (1988) y su comparación con las Normas de Concreto del Reglamento de la Ciudad de México entre 1987 y 2017

En esa época éste era precisamente el enorme reclamo de todos los grandes especialistas en tecnología de concreto de México al Comité de Normas de Concreto, ignorar la importancia del tipo de agregado (y aditivos) en el módulo de elasticidad, a lo que hicieron oídos sordos también en la revisión de las NTCC-96, donde se mantuvo esta definición. No fue sino hasta la revisión de las NTCC-04 (2004) donde se reconoció que el tipo de agregado es importante en el módulo de elasticidad (Figura 1b), especificando claramente, en su acápite 1.5.1.1 que: “el concreto clase 1 se fabricará con agregados gruesos con peso específico superior a 2.6 (caliza, basalto, etc.) y el concreto clase 2 con agregados gruesos con peso específico superior a 2.3, como andesita”. Para reafirmar este hecho, en el acápite 1.5.1.4 se estableció que para concretos clase 1, $E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c}$ para concretos

con agregados grueso calizo y $E_c = 11{,}000\sqrt{f'_c}$ para concretos con agregados grueso basáltico, dejando para el concreto clase 2 $E_c = 8{,}000\sqrt{f'_c}$, reconociendo que, para esta clase de concreto, normalmente se utiliza agregado grueso de origen andesítico. Este sigue siendo el criterio vigente en las NTCC-17 (2017). Aún así y con esta mejora, se aprecia en la Figura 1b que existen dispersiones (que deben esperarse) y, el que escribe, tiene la impresión que este cambio le ha pasado de noche a muchos diseñadores en México, que en automático consideran que para un concreto clase 1, $E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c}$, independientemente del tipo de agregado. Las dudas del que escribe son: 1) ¿si con esa hipótesis realizaron sus cálculos, en sus planos especifican que el concreto clase 1 debe dosificarse con agregado grueso calizo y supervisan que esto se cumpla en obra? y, 2) ¿están conscientes de esta gran variabilidad a la hora de tomar decisiones en la revisión de distorsiones (derivas) de diseño con límites establecidos, por ejemplo?

A nivel internacional, existen desde hace tiempo muchos estudios para mejorar las ecuaciones para estimar E_c y, de hecho, agregan normalmente otra variable para reducir la dispersión, que es densidad de la mezcla de concreto (ρ_{cf}), que toma indirectamente variables ya identificadas como la dosificación de la mezcla y la naturaleza de los agregados empleados. Aún así, las dispersiones obtenidas son fácilmente identificables (Figura 2, Lim y Ozbakkaloglu 2014), entre otras razones, como una consecuencia que el concreto sea en realidad un material no homogéneo.

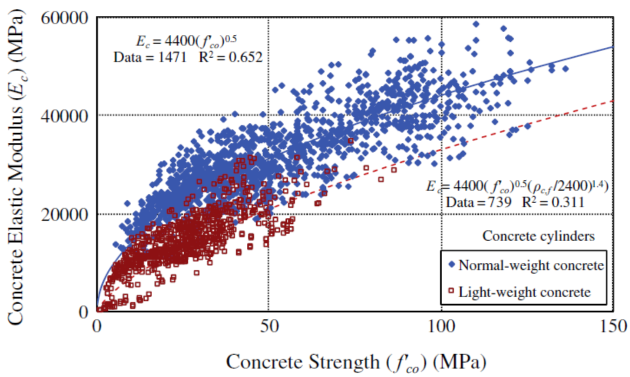


Figura 2 Variación del módulo de elasticidad del concreto (E_c) con la resistencia índice a la compresión del concreto (f'_{co}). Tomado de Lim y Ozbakkaloglu (2014)

El no estar consciente del hecho de la importante variabilidad del módulo de elasticidad del concreto cuando se modela éste como isotrópico, sobre todo si se define exclusivamente en función de un solo parámetro, f'_c, nubla el juicio de muchos ingenieros estructuristas, incluyendo algunos muy brillantes en su formación mecánica y matemática, buscando otras explicaciones para justificar subestimaciones en la rigidez elástica inicial de elementos de concreto ante deformaciones bajas, como el “micro agrietamiento” (que no han demostrado

fehacientemente que existe con pruebas experimentales) o aún peor, las "secciones agrietadas", tema que discutiremos con mayor detalle en la siguiente sección.

Por supuesto, desde hace mucho tiempo existen formulaciones más robustas para modelar al concreto desde el intervalo de comportamiento elástico, empezando por una formulación ortótropa (por ejemplo, Bazant 1983). Sin embargo, la mayoría de las formulaciones de este tipo se han enfocado para análisis más avanzados con elementos finitos, como mecánica de la fractura (por ejemplo, Rashid 1968, Rots 1988), teoría del daño continuo (Ramtani *et al.* 1992) o la teoría de campos de compresión modificados (Selby y Vecchio 1997, Vecchio 2000), entre otros.

3 RIGIDECES EFECTIVAS EN CONCRETO REFORZADO

3.1 Antecedentes de las propuestas contenidas en reglamentos

Desde hace varias décadas se ha empleado el concepto de la rigidez efectiva a flexión para la revisión de flechas en vigas antes cargas gravitaciones y para el diseño de columnas esbeltas, donde los efectos de segundo orden son importantes y se espera que, para deformaciones ya no pequeñas, sea racional que una porción del elemento de concreto se agriete (Hage y MacGregor 1974, MacGregor 1993). Más adelante, se ha promovido fuertemente introducir el concepto de rigidez efectiva a flexión para el diseño de elementos de concreto reforzado ante todo tipo de acciones, incluyendo, por supuesto, el diseño por sismo. La propuesta inicial introducida en el ACI-318-02 (2002) se basa en la propuesta de MacGregor (1993) y parte principalmente del estudio presentado por Hage y MacGregor (1974) y, desde ese entonces, existen disposiciones simplificadas para tomar estos conceptos en prácticamente todos los reglamentos de concreto reforzado del mundo, empezando por reglamento ACI-318 (ACI 318-02 2002, ACI 318-14 2014) y, en México, desde las NTCC-04 (2004) y, por supuesto, en las nuevas NTCC-17 (2017).

Por ello, varios estudios recientes del presente milenio se han conducido para mejorar el concepto de rigidez efectiva, pero muchos se han concentrado en determinar sólo las rigideces efectivas de la sección transversal (una rebanada infinitesimal) considerando que el concreto está agrietado a través de una porción de toda la sección transversal (en todo su ancho), lo que se conoce como sección agrietada (por ejemplo, Khuntia y Gosh 2004a) y, a partir de calcular diagramas momento-curvatura para dicha sección transversal, se definen rigideces secantes como rigideces efectivas, donde se mantiene como constante al módulo de elasticidad teórico del concreto E_c, por lo que la rigidez efectiva depende de considerar que el concreto se agrieta y, por tanto, se reduce su momento de inercia, en función de múltiples parámetros, entre otros (Khuntia y Gosh 2004a, Godínez *et al*. 2018): a) cuantía de refuerzo longitudinal a tensión (ρ) , b) cuantía de refuerzo longitudinal a compresión (ρ'), c) resistencia índice a la compresión del concreto (f'_c), d) relación de aspecto ancho entre peralte de la sección transversal (b/h), e) forma de la sección transversal (rectangular, T, L, etc.), f) efecto del acero transversal de confinamiento (dúctil o no dúctil), g) el esfuerzo axial actuante (columnas), h) distribución del acero longitudinal e, i) recubrimiento del concreto. La calibración de la propuesta de rigideces efectivas de Khuntia y Gosh (2004b) se hizo comparando con diagramas de interacción (carga axial- momento flexionante) para

pruebas experimentales hechas en los años sesenta en columnas, donde cabe señalar que los datos experimentales reportados en tablas son los correspondientes a las cargas más severas (por ejemplo, Furlong y Ferguson 1966).

Elwood y Eberhard (2009) realizaron un interesante estudio donde procesaron una base de datos experimentales de PEER de curvas carga-deformación de ensayes cíclicos hechos a columnas de concreto reforzado, de las que seleccionaron 366, 221 columnas de sección rectangular con estribos rectangulares y 108 columnas zunchadas de secciones circular, cuadrada u octagonal. A partir de ahí definieron diagramas momento curvatura para la sección transversal y, dado que no existían datos de medición de deformaciones en el acero longitudinal, la definición del desplazamiento de fluencia se hizo de manera aproximada utilizando el modelo de Mander para el concreto y suponiendo comportamiento lineal elástico para el acero de refuerzo, lo cual obviamente es una hipótesis cruda, pero válida, que hay que tomar en cuenta en la evaluación de sus resultados y propuestas. De esta manera, propusieron un modelo para determinar la rigidez efectiva que toma en cuenta: a) la deformación por flexión, b) la deformación por cortante y, c) la deformación por deslizamiento de las barras.

Los estudios anteriormente citados (Khuntia y Gosh 2004a/b, Elwood y Eberhard 2009) son muy interesantes y valiosos, pero en opinión del autor, tienen los siguientes aspectos para tomar en cuenta como limitantes:

a) Ninguno de los dos estudios muestran fotos o presentan esquemas de la extensión del agrietamiento (y anchos de grieta) de los elementos estructurales en estudio al supuesto primer agrietamiento y/o el agrietamiento a la primera fluencia del acero longitudinal con el que se basan sus propuestas. No es un asunto menor.

b) En sus estudios, Khuntia y Gosh se concentran sólo en la sección transversal agrietada (una rebanada infinitesimal), por lo que las rigideces efectivas son sólo válidas para esa sección y difícilmente deben tomarse como representativas de la rigidez efectiva a flexión de todo un elemento. Además, se supone que las grietas atraviesan a todo el elemento estructural en su ancho, lo cual sólo es cierto para grietas muy anchas o de gran espesor, no para fisuras asociadas a primeros agrietamientos, o para grietas asociadas a la primera fluencia del acero longitudinal.

c) En el estudio de Elwood y Eberhard no se proporciona un esquema típico de los puntos de aplicación de carga y medición de las columnas de su base de datos, por lo que es incierto si sus cálculos corresponderían a una rigidez promedio para todo el elemento. Además, al no basarse en lecturas de deformaciones del acero longitudinal, ni presentarse algunas fotos típicas del patrón de agrietamiento a la deformación calculada, queda la gran duda del nivel de agrietamiento real que experimentó ese elemento a esa deformación, que seguramente es distinto, y más severo, al del agrietamiento a la primera fluencia del acero de refuerzo en un elemento diseñado para fallar por flexión. En este sentido, al autor le parece exagerado considerar una componente de deformación por deslizamiento de las barras, fenómeno que normalmente se presenta a grandes deformaciones, no en el intervalo de comportamiento elástico lineal y hasta

la fluencia, más cuando se hace suponiendo esfuerzos de adherencia no medidos, entre otras hipótesis.

Para calcular una rigidez efectiva a flexión, se debe tomar en cuenta la variación de las propiedades de la sección transversal (inercia, área, área de cortante) y del módulo de elasticidad en toda la longitud del elemento, no sólo en una “rebanada infinitesimal” o parte de la sección transversal y, por ello, conforme a los principios fundamentales de análisis (por ejemplo, Bathe 1982, Przemieniecki 1985, Zienkiewicz y Taylor 1991, Tena 2007), esta rigidez se debe obtener mediante una integral de volumen a lo largo y ancho de todo el elemento de interés. Esta es la limitante principal del interesante estudio de Khuntia y Gosh (2004a): se supone una rebanada infinitesimal y agrietamiento a todo lo ancho de la sección transversal (solo realista para grietas muy anchas y profundas).

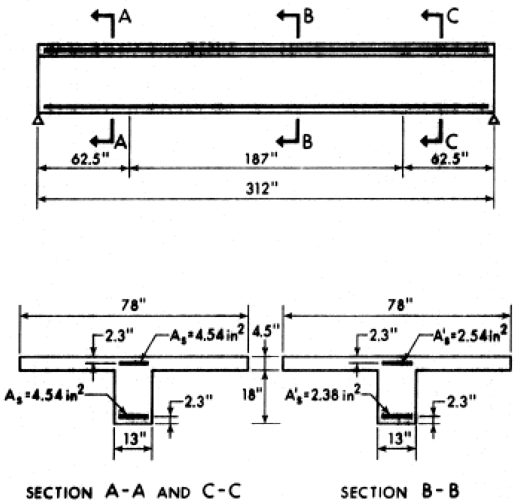
Sin embargo, lo anterior sí fue considerado en el estudio analítico pionero de Hage y MacGregor (1974), donde de manera correcta y transparente comentan que una viga agrietada de concreto reforzado se asemeja a una viga de sección variable donde el momento de inercia varía a través de su longitud. Por lo tanto, Hage y MacGregor (1974) comentan que el momento de inercia efectivo en una sección dada depende de momento flexionante actuante en esa sección y también puede depender de la historia de carga del elemento. Hage y MacGregor (1974) explican con detalle cómo obtuvieron analíticamente rigideces efectivas para el elemento ante todo tipo de cargas (idealizadas estáticamente) a partir de calcular diagramas momento-curvatura simplificados para distintos segmentos (suponiendo también agrietamiento completo en todo el ancho de la sección transversal, lo cual es práctico y conservador, pero no realista). Así, conocido el momento flexionante medio actuante (*M*) en una sección, a partir del diagrama momento-curvatura se determina la rigidez *EI* para ese segmento. Aplicando el principio de la viga conjugada, determinaron los coeficientes de flexibilidad (sin incluir deformaciones por cortante) e invirtiendo, obtuvieron los de rigidez y así, la rigidez efectiva de toda la viga ante esa condición de carga estáticamente idealizada.

De esta manera, Hage y MacGregor (1974) calcularon las rigideces efectivas para una viga continua que se muestra en la Figura 3a, y cuya relación claro-peralte es L/h=13.87. Consideraron tres condiciones de carga en el análisis, haciendo las siguientes definiciones, por ejemplo, para los momentos en los extremos de la viga ante carga gravitacional (M_{GM}) y ante carga lateral (M_{SM}):

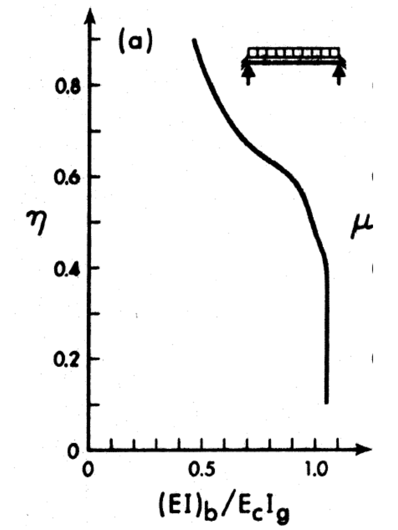
$$M_{GM} = \frac{\omega L^2}{12} = \eta M_u \quad (1)$$

$$M_{SM} = \mu M_{GM} \quad (2)$$

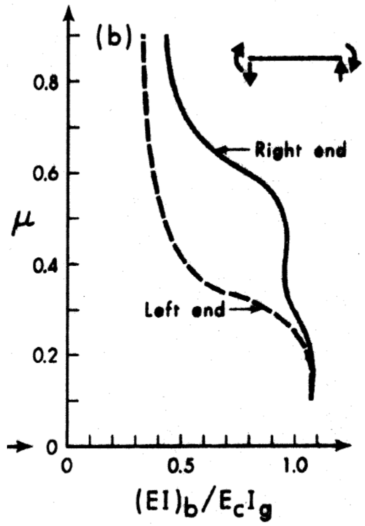
donde ω es la carga uniformemente repartida, L es la longitud de la viga, M_u es el momento último que resiste la sección transversal en su extremo, η es una factor adimensional que define la intensidad del momento aplicado que varía de 0 (sin a carga) a 1.0 (carga asociada al momento último) y μ es un factor adimensional que define que la proporción del momento ante cargas laterales como función del momento ante cargas verticales y también consideraron el intervalo $0 \leq \mu \leq 1$. Así cuando μ=0, esto significa que no hay momento actuante por carga lateral y si μ=1, entonces significa que ambos momentos son de la misma magnitud.



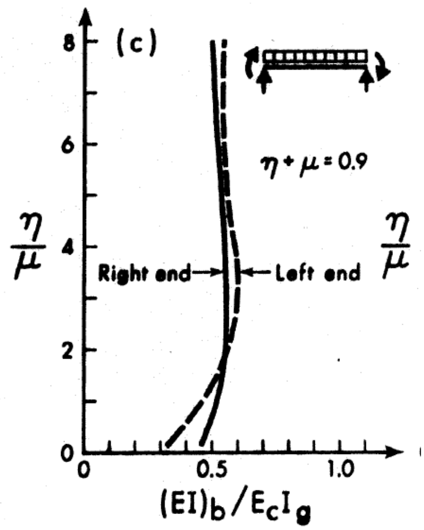
a) geometría y refuerzo viga estudiada



b) carga vertical exclusivamente



c) carga lateral exclusivamente



d) carga vertical más lateral

Figura 3 Rigideces efectivas calculadas $(EI)_b$ y normalizadas por la rigidez neta de la sección gruesa (E_cI_g) calculadas por Hage y MacGregor para la viga T mostrada en el inciso a. Figuras tomadas de Hage y MacGregor (1974)

En la Figura 3 se presentan los resultados reportados por Hage y MacGregor (1974) para la viga en estudio cuando: a) sólo actúan cargas verticales (Figura 3b), b) sólo actúan cargas laterales (Figura 3c) y, c) actúa una combinación de cargas verticales y laterales (Figura 3d). Si se considera que sólo están actuando las cargas verticales (condición más usual de una estructura antes de un sismo), se observa que para una intensidad de la carga vertical uniformemente repartida correspondiente al 60% del momento último ($\eta \leq 0.6$, Figura 3b), la rigidez efectiva es prácticamente la rigidez de la sección gruesa. Si sólo actúa la carga lateral (Figura 3c), se aprecia que la rigidez efectiva se reduce de una manera más notable a una misma intensidad de carga ($\eta = \mu$) con respecto a la carga vertical (Figura 3b).

Si se considera la acción combinada de cargas verticales y laterales a una intensidad combinada cercana a la capacidad a momento último ($\eta+\mu=0.9$, Figura 3d), para las distintas combinaciones de η y μ consideradas (dadas por el cociente η/μ), la rigidez efectiva de la viga es cercana al 50% la de la viga no agrietada. Éste parece ser el resultado del estudio de Hage y MacGregor (1974) que tomó en cuenta el Comité de Normas del ACI-318 para inicialmente proponer tomar, con fines de análisis $I=0.5I_g$ desde 2002 a la fecha, donde se tiene una propuesta más detallada (ACI 318-14 2014).
En opinión del autor, de haber sido este el razonamiento de los miembros del Comité del ACI-318 para proponer tomar $I=0.5I_g$ para fines de análisis cuando se empleen análisis elásticos lineales (y normalmente homogéneos e isotrópicos también), entonces se está proponiendo una rigidez secante equivalente para calcular desplazamientos sin afectar por ningún factor de ductilidad, por las razones que comentamos a continuación.

3.2 Consideraciones integrales para el diseño sismorresistente

Ciertamente, todas las estructuras se analizan y diseñan para combinaciones de cargas verticales más accidentales (Figura 4a), que no ocurren simultáneamente, salvo cuando actúa la carga accidental. En el caso de sismos, su ocurrencia con intensidad de diseño es incierta y normalmente sucede una vez cada cierto número de años y, en algunas estructuras desafortunadas de construcción reciente o en construcción, después de algunos meses o días. Por lo tanto, sí cabe señalar que para la mayor parte del inventario de estructuras que se construyen, antes de experimentar sismo intenso alguno (ya sea en días, meses o años), las únicas cargas que están actuando de manera permanente son las cargas verticales exclusivamente (Figura 4b).

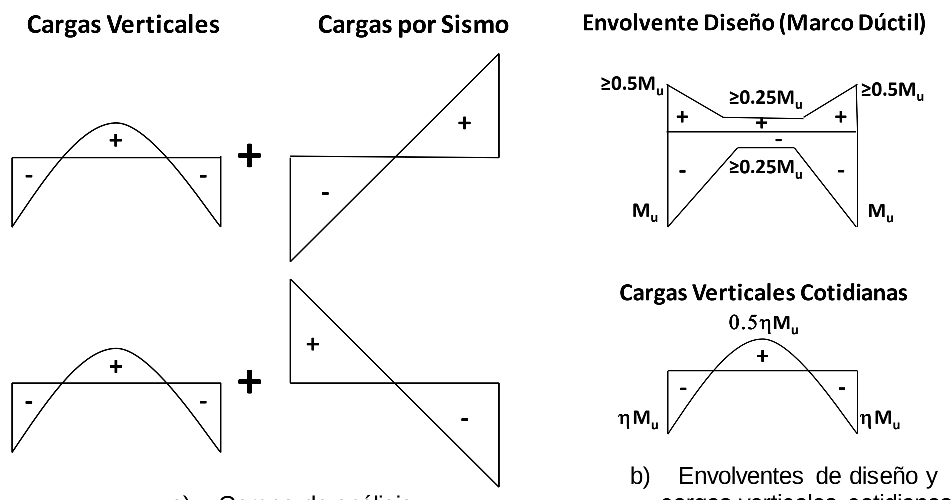


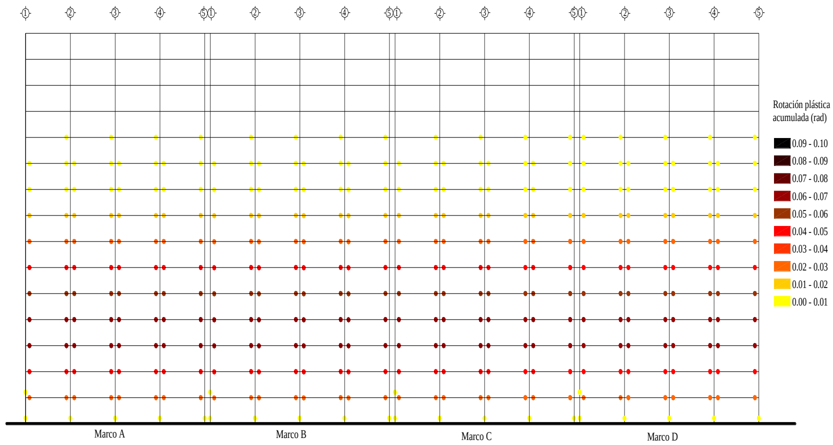
Figura 4 Esquematización de las consideraciones y proceso de diseño típico conforme a reglamento de una viga continua de concreto reforzado sujeta a combinaciones de cargas gravitacionales y accidentales

Así, los resultados más importantes para definir rigideces efectivas en el elemento antes de la ocurrencia de un sismo moderado o intenso corresponderían a las de la actuación de la carga vertical exclusivamente, definiendo la proporción

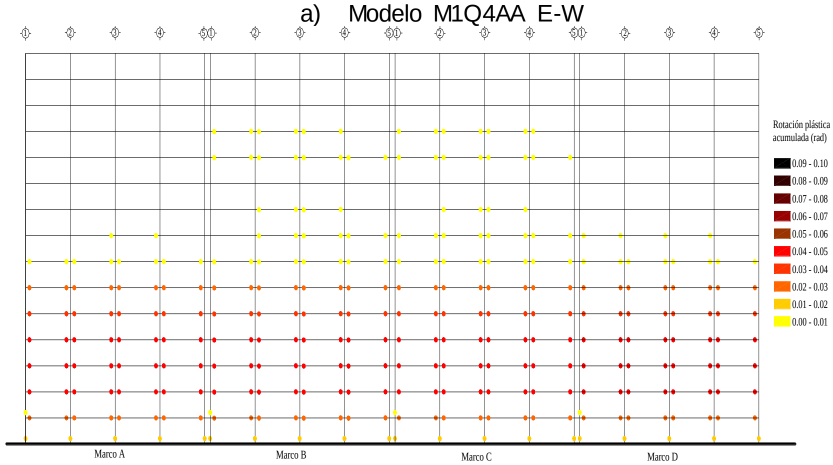
del factor η a tomar en cuenta en función de la proporción del momento actuante por cargas verticales con respecto al momento último de diseño, que ya toma en cuenta todas las combinaciones de cargas (verticales más accidentales, Figura 4b). Para las vigas más críticas, y suponiendo que dominen las cargas laterales (zonas de sismicidad alta), es claro que η<0.6, por lo que en estos casos, las rigideces efectivas serán muy cercanas a la rigidez elástica E_cI_g (Figura 3b). En cambio, en zonas que dominen las cargas verticales (sismicidad baja o nula, vientos despreciables, etc.), es cuando se espera que η>0.6 y, por tanto, la rigidez efectiva pueda reducirse hasta en un 30%. Por supuesto, esto sólo es para las vigas críticas del diseño. Para las demás vigas no críticas con secciones y armados tipo, la rigidez efectiva será mayor, incluyendo una rigidez 100% elástica.

Por esta última razón, en muchas simulaciones de estructuras de concreto reforzado diseñadas totalmente conforme a reglamento y considerando que las rigidez inicial de vigas y columnas corresponden a aquéllas de las secciones son gruesas, tomando en cuenta la actuación permanente de las cargas verticales, cuando se someten a registros de aceleración asociados al sismo de diseño, no todas las vigas presentan comportamiento inelástico, existiendo una proporción importante de ellas que mantienen un comportamiento elástico y, además, las vigas con sección tipo que responden inelásticamente, presentan demandas inelásticas distintas (por ejemplo, Tena y Correa 2008, Tena-Colunga *et al.* 2008a, Tena-Colunga 2010, Tena *et al.* 2012, Godínez-Domínguez *et al.* 2012, Godínez *et al.* 2012, Godínez-Domínguez y Tena-Colunga 2019).

Con fines ilustrativos, en la Figura 5 se presentan las rotaciones plásticas acumuladas máximas en los marcos en la dirección crítica para dos diseños distintos de un edificio de 15 niveles con base en marcos dúctiles de concreto reforzado, diseñados conforme al Apéndice A de las NTCS-04 (2004) y cuando el sistema de pisos con base en losas perimetrales apoyas dispone: a) vigas secundarias en una sola dirección (modelo M1Q4AA) y, b) las vigas secundarias se disponen en las dos direcciones (modelo M2Q4AA). En los análisis se tomó en cuenta los efectos iniciales de las cargas gravitacionales de diseño, pues éstas están actuando permanentemente. Los análisis dinámicos no lineales se realizaron ante la acción del registro de aceleración SCT85-EW registrado durante el 19 de septiembre de 1985 y se tomaron en cuenta todas las fuentes de sobrerresistencia, como se detalla en otros trabajos (Gatica 2007, Tena-Colunga *et al.* 2008a, Tena *et al.* 2012). De la observación de la Figura 5 se aprecia claramente lo discutido anteriormente: ni responden inelásticamente todas las vigas, ni todas las vigas tipo que responden inelásticamente desarrollan las mismas intensidades de rotaciones inelásticas. En este sentido, cabe señalar que las vigas tipo cambiaban refuerzo cada cuatro pisos y era distinto el diseño del refuerzo de las vigas de marcos exteriores (A y D) que interiores (B y C) y que, además, para cada marco, los refuerzos de las vigas extremas no eran idénticos a los de las vigas centrales (Gatica 2007, Tena *et al.* 2012), es decir, se optimaron y tipificaron secciones y refuerzos como se hace normalmente en la práctica de diseño estructural por parte de muchos despachos de diseño. Este ejercicio se desarrolló para 24 distintos modelos de edificios entre 12 y 15 niveles diseñados para ductilidades altas y bajas (por ejemplo, Tena-Colunga *et al.* 2008, Tena *et al.* 2012).



a) Modelo M1Q4AA E-W



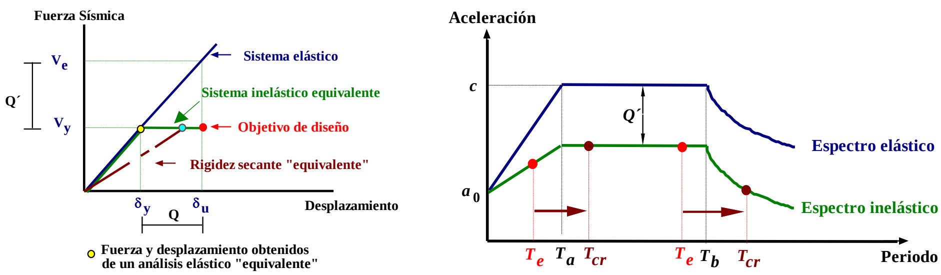
b) Modelo M2Q4AA E-W

Figura 5 Rotaciones plásticas acumuladas para los marcos en la dirección E-W de modelos de edificios de 15 niveles diseñados conforme al Apéndice A de las NTCS-04 y correspondientes al análisis realizado con el acelerograma SCT85-EW tomando fuentes adicionales de sobrerresistencia (Gatica 2007, Tena-Colunga *et al.* 2008a, Tena *et al.* 2012)

Entre otros razonamientos, este es uno por el cual el autor no cree en el cálculo de rigideces efectivas en vigas y columnas de estructuras de concreto para fines de análisis y diseño sísmico, y menos en la recomendación de tomar el 50% de la inercia de la sección gruesa para todos los elementos en toda la altura del edificio. Le parece una extrapolación exagerada y poco razonada, a partir de los resultados de un excelente estudio que se desarrolló con otros fines.

Los resultados presentados por Hage y MacGregor (1974) para la combinación de carga vertical y lateral representan una rigidez secante ante la acción extrema de diseño, es decir, representativa del agrietamiento y daño después de la ocurrencia del sismo, no antes de que éste se presente. De esta manera, para fines de diseño, esa rigidez secante corresponde a secciones muy agrietadas y se debería tomar para estimar o calcular directamente los desplazamientos últimos. En el caso de los reglamentos de diseño sísmico de

México, éstos serían los calculados con el análisis elástico equivalente ante fuerzas reducidas, pero sin multiplicar por el factor Q (C_d en los reglamentos de diseño sísmico de los Estados Unidos), y constituirían una aproximación muy inexacta de estos desplazamientos, como lo discute el autor con detalle en otros textos (Figura 6a, Tena *et al.* 2012). Sin embargo, conforme a las NTCC-04 y NTCS-04, aun considerando inercias efectivas, se deben calcular los desplazamientos últimos multiplicando los obtenidos en el análisis elástico por Q, lo cual es un cálculo aproximado e incorrecto y, en varias instancias, quizás sea excesivamente conservador, sobre todo para edificios de mediana o gran altura en los suelos blandos de la Ciudad de México.



a) Cálculo de desplazamientos de diseño cuando $Q \geq 2$ y se agrietan todas las vigas ($I_e=0.5I_g$)

b) Consecuencias en las demandas de fuerzas de diseño al considerar secciones gruesas (T_e) o agrietadas (T_{cr}) en vigas

Figura 6 a) Conceptualización de los factores de comportamiento sísmico (Q) y de reducción de las fuerzas sísmicas con fines de diseño ($Q´$) de los reglamentos de diseño sísmico de México, considerando que, por simplicidad, se supone que el sistema inelástico equivalente tiene un comportamiento elastoplástico perfecto y, b) Ilustración simplista del por qué no resulta necesariamente seguro diseñar estructuras de concreto reforzado considerando una rigidez efectiva agrietada en las vigas

Por otra parte, desde el punto de vista de diseño sismorresistente, el considerar secciones agrietadas no necesariamente lidera a un diseño más seguro o conservador, pues esto va a depender a qué parte del espectro de diseño conduzca el alargamiento del periodo fundamental de vibrar, dependiendo de las características de la estructura en cuestión, como se ilustra esquemáticamente en la Figura 6b. Para estructuras cuyo periodo elástico (T_e) esté dentro de la rama ascendente del espectro de diseño, considerar secciones agrietadas (T_{cr}) liderará a que la estructura sea diseñada con fuerzas mayores y, en este caso, ese diseño pudiera ser conservador. En cambio, si el periodo elástico se encuentra en la parte final de la meseta o en la rama descendente del espectro, el considerar secciones agrietadas llevará a que la estructura se diseñe con fuerzas menores a las que estará sujeta de inicio y, en estos casos, ese diseño pudiera ser no conservador.

3.3 Evidencia fotográfica después de un sismo intenso

El autor es un observador frecuente (prácticamente a diario) de las condiciones en que se encuentran las estructuras existentes de concreto reforzado (y otros materiales) en las ciudades que en las que ha vivido o visitado en México y otras partes del mundo, porque es un enamorado de ellas. Por ello, puede afirmar

que realmente no ha observado agrietamientos en vigas y columnas en estructuras de concreto protegidas del intemperismo y/o con mantenimiento adecuado, no importando su año de construcción; sólo ha visto agrietamientos en estructuras abandonadas, intemperizadas de manera importante y/o con mantenimiento deficiente, que son un inventario mucho más reducido de las que se diseñan y construyen ingenierilmente. Por lo tanto, en su experiencia, las estructuras de concreto diseñadas y construidas ingenierilmente no experimentan, en general, secciones con agrietamientos importantes antes de un sismo, y en aquéllas abandonadas o intemperizadas, es tan claro y visible el daño, que cualquier persona, sin ser ingeniero de profesión, concluye que se requiere su rehabilitación o refuerzo o, en el peor de los casos, su demolición.

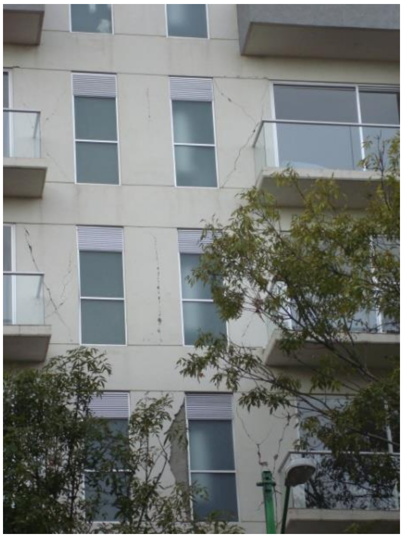
De hecho, muchas estructuras que se encuentran dañadas en sus muros diafragma (“infill walls”) y muros no estructurales de mampostería después de un sismo intenso, en muchas ocasiones no presentan daños (grietas visibles) en vigas, o la presentan en sólo algunas de ellas. Esta no fue la excepción durante los recientes sismos del 7 de septiembre de 2017 (Figura 7) y del 19 de septiembre de 2017 (Figura 8) en México. Esto también incluye a estructuras con primer piso suave y débil, donde se desarrolla el daño en las columnas, mientras las vigas permanecen sin agrietamiento alguno (Figuras 9 y 10). Cabe señalar que esto se observó en múltiples edificios, pero por fines de espacio sólo se ilustra en edificios construidos con reglamentos de resistencia última y con la filosofía de estado límite de prevención de colapso de México posteriores al sismo del 19 de septiembre de 1985.



Figura 7 Daño típico extendido en muros diafragma de fachadas en el Hospital General Bicentenario de la Secretaría de Salud en las afueras de Villaflores, Chiapas, experimentado durante el sismo de Tehuantepec del 7 de septiembre de 2017. El hospital es de muy reciente diseño y construcción, pero no experimentó grieta alguna en vigas ni en columnas

Lo anterior no es algo nuevo, se observa frecuentemente en el reconocimiento de estructuras después de un sismo intenso (con y sin daño estructural). De hecho, al autor le consta que aún edificios altamente irregulares y construidos en los años sesenta y que soportaron el sismo del 19 de septiembre de 1985 y varios más que superaron por mucho las hipótesis en su diseño, presentan cerca de 45 años después a la enorme mayoría de sus vigas sanas (sin fisuras y grietas), a pesar de contar con un detallado para ductilidad intermedia, como se puede observar en las fotografías presentadas en Tena *et al.* (2017a) y en la Figura 11a, donde se presenta el detalle de una de las únicas tres trabes del todo edificio

(niveles 11 y 12) que presentan fisuras fruto de sismos previos, y que con dichos agrietamientos no representan ni el 5% de la pérdida de rigidez, con base en la evidencia experimental que se discute en la siguiente sección. En la Figura 11b se presenta un panorama general de cómo se observan las trabes de concreto reforzado en un entrepiso típico de ese edificio, totalmente sanas a pesar de sus más de 45 años y haber experimentado muchos sismos intensos.



a) Portales Norte (2012)



b) San Simón Ticumac (2007)

Figura 8 Daño típico en muros diafragma de edificios recientemente construidos con base en marcos de concreto reforzado desplantados en suelos blandos de la ciudad de México. Obsérvese que no existen agrietamientos en las vigas de los marcos de fachada, ni se presentaron en el interior



Figura 9 Daño típico en muros diafragma y en columnas de un edificio estructurado con base en marcos de concreto reforzado y con piso suave y débil ubicado en la colonia Del Valle Centro (suelos de transición) en la ciudad de México, construido en 1987. Obsérvese que no existen agrietamientos en las vigas de los marcos que componen el piso suave, ni se presentaron en el interior y exterior



Figura 10 Daño típico en muros diafragma y en columnas de un edificio estructurado con base en marcos de concreto reforzado y con piso suave y débil ubicado en la colonia Portales Norte (suelos blandos) en la ciudad de México y construido a fines de los años ochenta. Obsérvese que no existen agrietamientos en las vigas de los marcos que componen el piso suave, ni se presentaron en el interior y exterior



a) Trabe en zona central, nivel 11 b) Trabes de un entrepiso típico

Figura 11 Estado de conservación típico de las trabes del edificio del ISSSTE Buenavista (Tena et al. 2017), construido en 1968 y que ha soportado muchos sismos intensos que sobrepasan las acciones consideradas en su diseño. Obsérvese que la enorme mayoría de las vigas están sanas (sin agrietamientos), excepto tres que se observaron en una inspección y evaluación de seguridad sísmica solicitada a la UAM-A cuando el edificio cambió de dueño (de Ferronales al ISSSTE)

De manera similar, en las inspecciones de campo como resultado del sismo de Manzanillo del 9 de octubre de 1995 (M_W=8.0), se apreciaron que aunque el Hospital General de Zona HGZ-1 del IMSS en Manzanillo se dañó seriamente por el inadecuado detallado estructural, donde se presentaron columnas cortas o cautivas (Figura 12a) en un edificio que se diseñó como marco a momento, pero que se construyó con muros no estructurales no propiamente desligados de la estructura, las vigas de sus sistemas de piso estaban totalmente sanas (Figura 12b),

a pesar de este daño y del asentamiento del terreno que se presentó en el edificio (Tena y Del Valle 1996, Tena *et al.* 1997, Tena 2011).



a) Daño típico presentado por columna corta o cautiva



b) Vigas de los marcos y secundarias totalmente sanas

Figura 12 Daño típico por columna corta observado en el HGZ-1 del IMSS en Manzanillo después del sismo del 9 de octubre de 1995. Obsérvese que a pesar del daño por columna corta y por asentamiento súbito en el terreno, las vigas del edificio se mantuvieron sanas, sin agrietamientos observables

3.4 Evidencia a partir de resultados de ensayes experimentales

La experiencia del autor en el desarrollo de pruebas experimentales de trabes prismáticas y acarteladas de concreto reforzado diseñadas para fallar a cortante y sujetas a cargas monótonas crecientes y cíclicas le confirman el hecho que, para que las vigas pierdan el 50% de su rigidez inicial, se requieren agrietamientos insultantemente notables y extendidos, y éstos no corresponden a la primera fluencia del acero longitudinal, sino a proporciones mayores, sobre todos cuando se someten a cargas cíclicas (por ejemplo, Archundia-Aranda *et al.* 2013, Tena-Colunga *et al.* 2017, Tena *et al.* 2017b).

Para ilustrarlo, explicaremos nuestro razonamiento con resultados procesados a partir de datos experimentales y el archivo fotográfico disponible de los mismos para las vigas diseñadas a fallar a cortante y, para mayor facilidad, sólo presentaremos los resultados de los estudios para las vigas prismáticas de referencia y para las trabes acarteladas con ángulo de acartelamiento α=3.06^0, por ser la más cercana a una prismática en comportamiento y ser las vigas de sección prismática las más empleadas en edificación.

De entrada, se sabe que las vigas ensayadas están sobre reforzadas a flexión para garantizar que fallen a cortante (lo que se pretendía en esos estudios) y, por ello, *a-priori*, se debe tomar en cuenta que: a) el agrietamiento observado será más severo y extendido que en una viga diseñada para fallar dúctilmente a flexión y, b) la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal se presenta en deformaciones angulares mayores que en una viga diseñada dúctilmente a flexión. Por ello, las rigideces efectivas a la primera fluencia del acero longitudinal determinadas de los datos experimentales de estos estudios son, en consecuencia, menores a las que se obtendrían experimentalmente en vigas diseñadas a fallar en flexión.

Como en el estudio de Hage y MacGregor (1974) la rigidez secante se obtuvo a partir de la integración de condiciones de carga instantáneamente aplicadas (análisis estático), entonces vale la pena comparar primero con los resultados de los ensayes realizados ante carga puntual monótona creciente (Casales *et al*. 2002, Archundia 2004, Archundia *et al.* 2006, Tena-Colunga *et al.* 2008b) y los estudios analíticos en elementos finitos asociados al mismo (Archundia 2004, Archundia *et al.* 2006, Godínez *et al.* 2013, Godínez-Domínguez *et al.* 2015).

Ante carga monótona creciente, se tuvieron problemas en el ensaye de la trabe prismática, por la falla prematura de un elemento del dispositivo de carga y, por ello, se tuvo que ensayar nuevamente semanas después de haberla sujeta en la prueba inicial hasta una carga que rebasó el agrietamiento inicial, por lo que para fines de comparación de rigideces efectivas, no es del todo representativa. Así, nos concentraremos en los resultados y estudio correspondiente al ensaye de la trabe acartelada de 3.06^0 con refuerzo transversal mínimo por cortante, identificada como TASCα1-R1. Dado que en estas pruebas sólo se disponía de un deformímetro en el acero de refuerzo longitudinal al centro de una de las cartelas, no se puede saber con certeza si éste fluyó, pero a partir del registro a la carga de falla ($\varepsilon = 0.71\varepsilon_y$), se infiere que tal vez no se presentó y, si sucedió en otra sección más cercana al centro de claro, esta fluencia sería incipiente y quizás cercana a la falla. En la Figura 13 se presentan dos fotos del ensaye, al momento de la carga de agrietamiento (Figura 13a) y ante la carga última o máxima (Figura 13b). En la Figura 14 se presentan las rigideces secantes normalizadas con la rigidez elástica inicial del ensaye (K_0) obtenidas para tres estados de interés del ensaye: a) carga al primer agrietamiento diagonal (Δ=1.11%), b) carga última (Δ=2.03%) y, c) carga de colapso (Δ=2.51%). Como se aprecia, la rigidez efectiva al agrietamiento diagonal (Figura 13a), que es bastante visible, es del 98.9%, mientras que a la carga máxima ó última (Figura 13b) es del 98% y, aún a la falla, la rigidez secante efectiva fue del 83.4%. Así, ante esta condición de carga vertical monótona, y para un daño muy visible, grave y extendido, las rigideces efectivas determinadas a partir de pruebas experimentales para este elemento son muy superiores al 50% mínimo propuesto en vigas propuesto tanto en el ACI-318 como en las NTCC-04 y NTCC-17.

Se hizo también un estudio aproximado, ante la limitante de disponibilidad de software más avanzado en esa época, empleando un modelo en elementos finitos con el SAP-2000, donde se utilizaron elementos tipo cascarón grueso de interpolación lineal y, para representar de manera cruda el agrietamiento, en la malla de elementos finitos (cuadros de 5 cm x 5 cm) se discretizaron las grietas empleando el procedimiento de agrietamiento de módulos, asignando a los elementos finitos por donde cruza la grieta (Figura 15) una porción de la rigidez total del elemento. Se estudió exclusivamente los patrones de agrietamiento a la carga última o máxima (Archundia 2004, Archundia *et al.* 2006) y, en este caso, se asignó una rigidez remanente del 5% para cada elemento finito por el que cruzaba una grieta, suponiendo que el daño era a través de todo lo ancho de la sección transversal correspondiente. Así, bajo estas hipótesis, se calculó la rigidez secante con respecto a la rigidez elástica inicial también determinada con elementos finitos. Bajo estas hipótesis, la rigidez efectiva analíticamente estimada para la carga última, y discretizando el agrietamiento como se comenta, fue del 77.1%, inferior que la determinada experimentalmente del 98%. ¿Qué razón hay en estas diferencias? Bueno, reconocer primero que aunque se hizo un análisis “en elementos finitos”, las hipótesis del modelado son crudas porque: a) se supone daño uniforme a lo largo y ancho del elemento finito agrietado, lo cual puede no suceder en realidad en todas

las grietas (nosotros sólo vemos las caras externas) y, b) asociado a lo anterior, se supuso una rigidez remanente de sólo el 5% de la elástica en cada elemento finito “agrietado” y, en promedio, debió ser bastante mayor que eso en las zonas donde exteriormente se marcaron grietas, seguramente.



a) Primer agrietamiento diagonal (Δ=1.11%) b) Carga máxima o última (Δ=2.03%)

Figura 13 Patrones de agrietamiento obtenidos en la trabe TASCα1-R1 (α=3.06^0) ante el ensaye ante cargas monótonas crecientes aplicadas a los tercios del claro en condiciones de apoyo simple

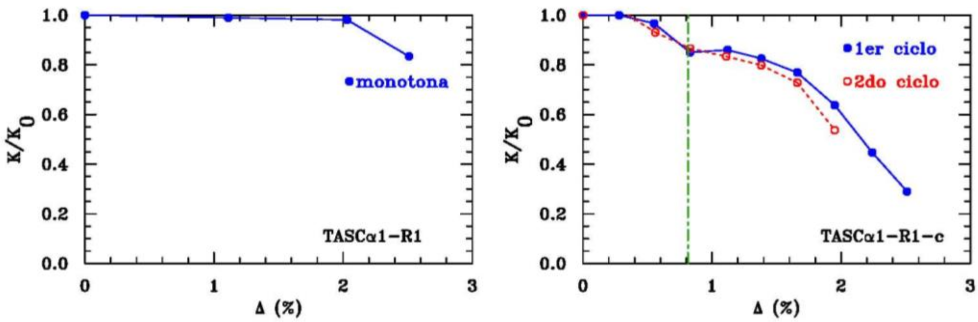


Figura 14 Curvas de rigidez secante efectiva (o de degradación de rigidez) para las trabes TASCα1-R1 (α=3.06^0, ensaye ante cargas monótonas crecientes) y TASCα1-R1-c (α=3.06^0, ensaye ante carga cíclica)

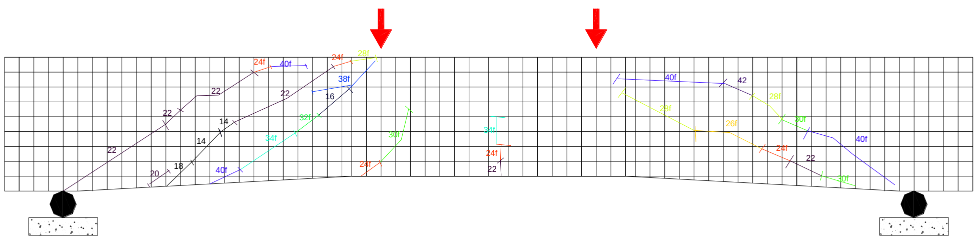
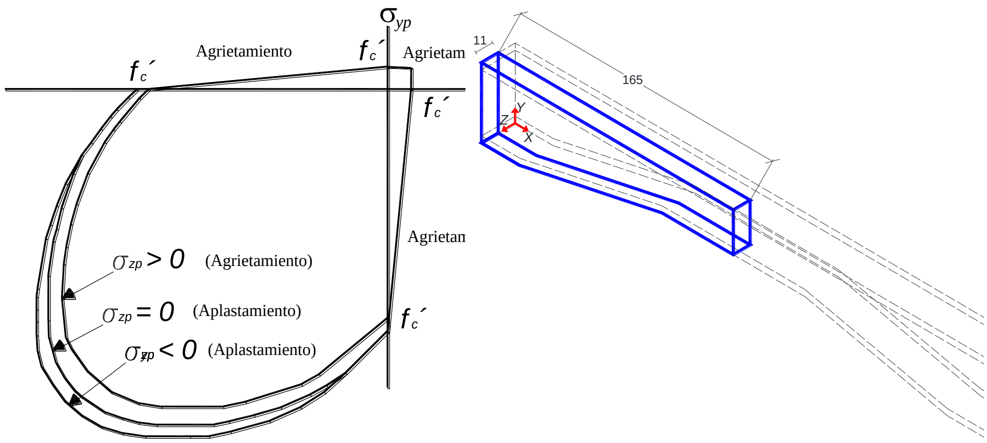


Figura 15 Mallado en elementos finitos empleado por Archundia (2004) para estudiar de manera simplificada la degradación de rigidez de la trabe TASCα1-R1 (α=3.06^0) a la carga última con el método de agrietamiento de módulos. La figura del levantamiento de las grietas principales observadas en la viga con la malla a emplear se tomó de Casales *et al.* (2002), donde se documentó

Más adelante, se hizo un estudio con elementos finitos no lineales empleando el programa Ansys y haciendo un modelado discreto para el concreto reforzado, con los detalles que se señalan y discuten en otros trabajos (Godínez *et al.* 2013, Godínez-Domínguez *et al.* 2015). Para modelar al concreto se emplearon elementos sólidos en 3D definiendo la superficie de falla del concreto (Figura 16a). El acero de refuerzo se modeló por elementos tipo barra con una relación constitutiva bilineal con superficie de fluencia de Von Mises. Se supuso adherencia

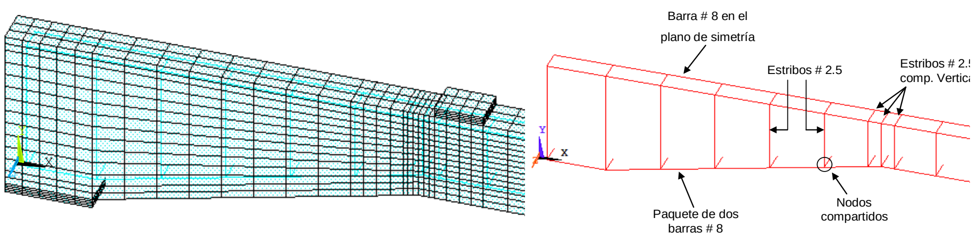
perfecta entre el concreto y el acero de refuerzo. Con fines de eficientizar el cálculo numérico, sólo se modeló un cuarto de la viga (Figura 16b), aduciendo a las relaciones de aparente simetría de la viga. Obviamente, esta es una primera aproximación, pues la evidencia física del ensaye muestra que el daño presentado no fue simétrico (Figuras 13 y 15), entre otras razones, por las siguientes: a) el concreto no es un material homogéneo, y sus propiedades varían a lo largo del elemento y, b) las pequeñas fluctuaciones observadas durante los ensayes en la aplicación de las cargas con los gatos hidráulicos empleados. Dado que las principales incertidumbres que son las variaciones de las propiedades representativas del concreto a lo largo y ancho del elemento no son fáciles de cuantificar, esta primera aproximación en un modelo complicado es razonable. La malla típica empleada para las trabes acarteladas en estudio después de hacer un estudio preliminar tomando en cuenta la energía de deformación se muestra en la Figura 17.



a) Superficie de falla en el concreto

b) Modelado por simetría

Figura 16 Consideraciones para el análisis no lineal en elementos finitos empleando Ansys: a) superficie de falla considerada en el concreto y, b) modelado de ¼ de la viga por aparente simetría (Godínez *et al.* 2013)



a) Mallado de viga, placa de transmisión de la carga y apoyo

b) Acero de refuerzo longitudinal y transversal modelado

Figura 17 Mallado típico en elementos finitos empleando Ansys: a) superficie de falla considerada en el concreto y, b) modelado de ¼ de la viga por aparente simetría (Godínez *et al.* 2013)

Se realizó un análisis no lineal ante carga monótona creciente aplicada en la parte superior y distribuida en las placas modeladas en la parte superior del vértice (Figura 17a), como se hizo en realidad. Para el análisis se consideraron las propiedades mecánicas determinadas experimentalmente a partir de ensayes de

cilindros de concreto y de probetas del acero de refuerzo (Archundia 2004, Tena-Colunga *et al.* 2008b) y que se identifican para la trabe TASCα1-R1 en las Tablas 1 y 2 respectivamente. Cabe señalar que en la Tabla 1 se identifican los parámetros adicionales requeridos por Ansys: a) el coeficiente de transferencia de cortante para grieta abiertas (β_t), b) el coeficiente de transferencia de cortante para grieta cerradas (β_c) y, c) el factor que afecta la rigidez ante una condición agrietada por tensión.

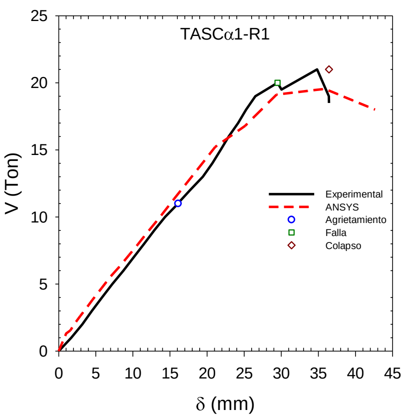
Tabla 1 Propiedades del concreto empleadas en la construcción (Archundia 2004) y modelado de las TASCa1-R1 en ANSYS (Godínez *et al.* 2013)

f'_c (kg/cm²)	f_t (kg/cm²)	E (kg/cm²)	v	β_t	β_c	Factor de grietas por tensión
269	26.9	133731	0.2	0.50	0.30	0.9

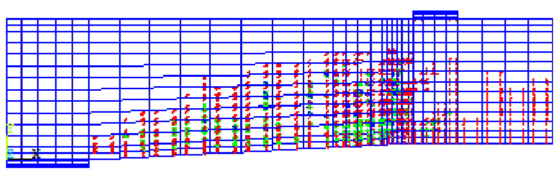
Tabla 2 Propiedades del acero de refuerzo empleado en la construcción (Archundia 2004) y modelado de las TACR en ANSYS (Godínez *et al.* 2013)

Probetas	f_y (kg/ cm²)	ε_y	ε_{sh}	f_{su} (kg/ cm²)	ε_{su}
Varilla No. 8	4348	0.00237	0.0086	7707	-
Varilla No. 2.5	4592	0.00235	0.0074	7448	-

En la Figura 18a se presenta la comparación de la curva carga-desplazamiento experimental (línea continua) con la obtenida del análisis con Ansys, donde se supuso que, de inicio, no existe ningún tipo de agrietamiento. Se aprecia una muy razonable concordancia, desde la estimación de la rigidez elástica, donde en este caso fue ligeramente superior en Ansys, además de los puntos correspondientes al agrietamiento y carga máxima ("falla").



a) Curvas carga-deformación



b) Patrón de agrietamiento para la carga última o de falla

Figura 18 Resultados obtenidos con el modelo en elementos finitos en Ansys para la trabe TASCα1-R1 (Godínez *et al.* 2013)

El colapso en el espécimen se presentó antes que el obtenido analíticamente en el modelo en Ansys, porque a ese nivel de deformación ya se observaron grietas paralelas al acero longitudinal por pérdida de adherencia, de hecho, desde la carga máxima o última (Figura 13b), y este fenómeno no se modeló en Ansys. En la Figura 18b se presenta el esquema de agrietamiento que se obtiene

con Ansys, cuya explicación detallada se hace en otros trabajos (Godínez *et al.* 2013, Godínez-Domínguez *et al.* 2015), pero se puede comparar con los mostrados en las Figuras 13b y 15 y concluir que, dadas las hipótesis de simplificación del problema en el análisis con elementos finitos (concreto homogéneo, adherencia perfecta entre acero y concreto, simetría perfecta en propiedades, entre otras), son más que razonables los resultados como una primera aproximación.

Retomando el tema central que nos interesa en esta sección, que es la rigidez efectiva del elemento de concreto, se deben hacer estas observaciones. Los análisis no lineales se hicieron suponiendo que el concreto de inicio permanece virgen (sin daño) y toda la viga también, por lo que se modelaron con sus propiedades elásticas íntegras y secciones gruesas. Así, se obtuvo una aproximación muy notable entre la curva calculada analíticamente con Ansys y la experimental. De esta manera, las rigideces efectivas que se calcularían del análisis con Ansys serían muy cercanas a las mostradas en la Figura 14, definidas a partir del ensaye experimental. Estas rigideces efectivas son muy superiores al 50% propuesto por el ACI-318 o las NTCC-04 y NTCC-17, y son para una falla de cortante, con patrones muy extendidos de agrietamiento en el elemento en su longitud a la carga máxima (Figuras 13b, 15 y 18b), mucho más que lo se presentarían a la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal en una viga o columna diseñada a fallar dúctilmente a flexión. Entonces, cabe formular la siguiente pregunta: ¿es la recomendación del ACI-318 y de las NTCC-04 y NTCC-17 realista y segura para el diseño de estructuras de concreto reforzado?

El autor y sus colaboradores también han realizado ensayes de trabes acarteladas de concreto reforzado diseñadas para fallar a cortante y sujetas a cargas cíclicas, donde se repite un ciclo a la misma deformación. Estos ensayes se documentan y discuten con detalle en Grande (2009), Archundia (2013) y Archundia-Aranda *et al*. (2013) para las vigas con refuerzo por cortante y en condiciones de apoyo simple (gemelas en geometría a las ensayadas ante carga monótona creciente), y en Urbina (2013), Tena-Colunga *et al.* (2017) y Tena *et al.* (2017b) para los ensayes en condición de continuidad.

Discutiremos exclusivamente los resultados de las trabes prismáticas y las del ángulo cercano a tres grados en ambos casos. Para estos ensayes, se instrumentó más densamente el acero de refuerzo longitudinal con deformímetros (Figura 19), por lo que existen lecturas de los mismos a distintas fases del ensayes (por ejemplo, Grande 2009) y, a partir de ellos, se determinó la carga “exacta” (no hay tal cosa, en realidad) en que se registró la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal. De esta manera, se obtuvo en cada ensaye el instante de deformación en el que, aparentemente, ocurrió la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal. Además, se calculó la rigidez secante efectiva en cada ciclo de deformación, y se normalizó con respecto a la rigidez inicial elástica de cada elemento (K_o).



a) Instrumentación del acero de refuerzo especímenes simplemente apoyados



b) Instrumentación del acero de refuerzo especímenes en condición de continuidad

Figura 19 Instrumentación interna típica del acero de refuerzo y estribos de las trabes prismáticas y acarteladas de concreto reforzado ensayadas ante cargas cíclicas. La ubicación de los deformímetros se aprecia fácilmente por el color amarillo mostaza

En la Figura 20 se presentan las curvas de degradación de rigidez (o rigideces secantes efectivas) para los primeros y segundos ciclos a una misma deformación obtenidas para las trabes prismáticas (TASCα0-R1-c) y acartelada con $\alpha=3.06^0$ (TASCα0-R1-c). La línea verde punteada indica la distorsión en la que se desarrolló, aparentemente, la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal, que para la trabe prismática fue $\Delta=1.44\%$ y para la trabe acartelada de 3.06 grados $\Delta=0.81\%$. A estos niveles de distorsión, las rigideces efectivas mínimas de las trabes fueron, para la viga prismática el 80% de la inicial (segundo ciclo, Figura 20) y para la trabe acartelada con $\alpha=3.06^0$, 85% de la inicial (primer ciclo, Figura 20). Nuevamente, aun considerando la degradación cíclica, que reduce notablemente la rigidez efectiva con respecto a una carga monótona creciente, como se observa de la comparación de las curvas de ensayes ante cargas monótonas y cíclicas para la trabe acartelada con $\alpha=3.06^0$ (Figura 14), la rigidez efectiva de todo el elemento es muy superior al 50% recomendado por el ACI 318 y las NTCC-04 y NTCC-17, para una falla como la de cortante donde la rigidez efectiva se degrada de manera más rápida que para una falla a flexión.

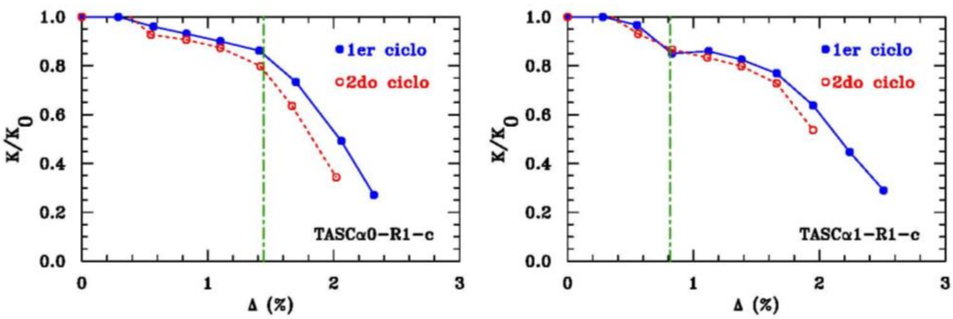
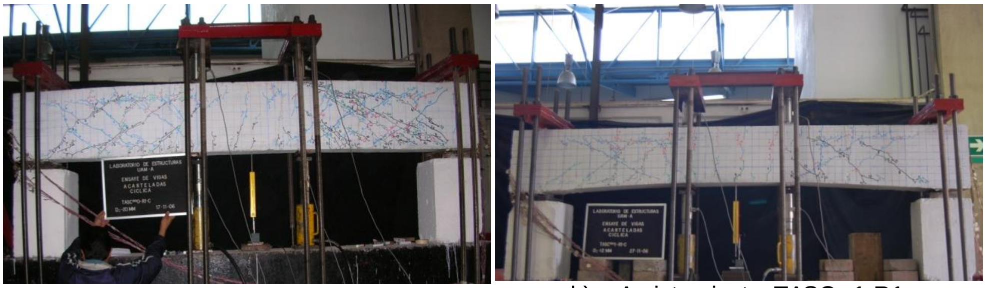


Figura 20 Curvas de rigidez secante efectiva (o de degradación de rigidez) para las trabes TASCα0-R1-c (prismática) y TASCα1-R1-c ($\alpha=3.06^0$), simplemente apoyadas ensayadas ante carga cíclica

En la Figura 21 se presentan las fotos tomadas a estos especímenes más cercanas al instante de la fluencia, y que corresponderían a los círculos rojos (segundos ciclos) más cercanos a la línea verde mostrada en la Figura 20, pues las fotos se tomaron normalmente cuando se completaban los dos ciclos a una misma deformación, salvo que ocurriera algo inesperado o importante de fotografiar antes. De la observación de estas fotos sólo se puede concluir que estos tipos de agrietamientos no pueden pasar inadvertidos en una estructura en condiciones de servicio, antes o después de un sismo, no solamente por parte de ingenieros especialistas, sino de gente común, y están asociados a rigideces efectivas del 80% de la elástica inicial o superiores.



a) Agrietamiento TASCα0-R1-c (Δ=1.42%)

b) Agrietamiento TASCα1-R1-c (Δ=0.83%)

Figura 21 Patrones de agrietamiento obtenidos en las trabes TASCα0-R1-c (prismática) yTASCα1-R1-c (α=3.06^0) a una distorsión cercana a la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal durante en ensaye ante cargas cíclicas aplicadas a los tercios del claro en condiciones de apoyo simple

En la Figura 22 se presentan las curvas de rigideces secantes efectivas para los primeros y segundos ciclos a una misma deformación obtenidas para las trabes prismáticas en condiciones de continuidad (TASCV3α0-R1-c), que sería el ensaye más representativo de una trabe común de un edificio sujeta a cargas por sismo. Se presentan los resultados para los segmentos de trabe a la izquierda y a la derecha del nudo viga columna (Figura 19b). La línea verde punteada indica la distorsión en la que se desarrolló, aparentemente, la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal. Para el segmento izquierdo de la trabe esto ocurrió a una distorsión Δ=0.72%, mientras que para el segmento derecho ocurrió para Δ=0.97%. A estos niveles de distorsión, las rigideces efectivas mínimas fueron, para la trabe izquierda, el 73.7% de la inicial (segundo ciclo, Figura 22) y para la trabe derecha el 65.5% de la inicial (segundo ciclo, Figura 22). Nuevamente, la rigidez efectiva secante mínima determinada experimentalmente está por encima del 50% recomendado como máximo por el ACI-318 y las NTCC-04 y NTCC-17.

En la Figura 23 se presentan las fotos tomadas a estos especímenes más cercanas al instante de la fluencias indicadas, y que corresponderían a los círculos rojos (segundos ciclos) más cercanos a las líneas verdes mostradas en la Figura 22. Nuevamente, el agrietamiento que se presenta y marca es observable por cualquier persona a simple vista y está asociado a rigideces secantes efectivas superiores al 50% que se propone como mínimo en la reglamentación internacional actualmente.

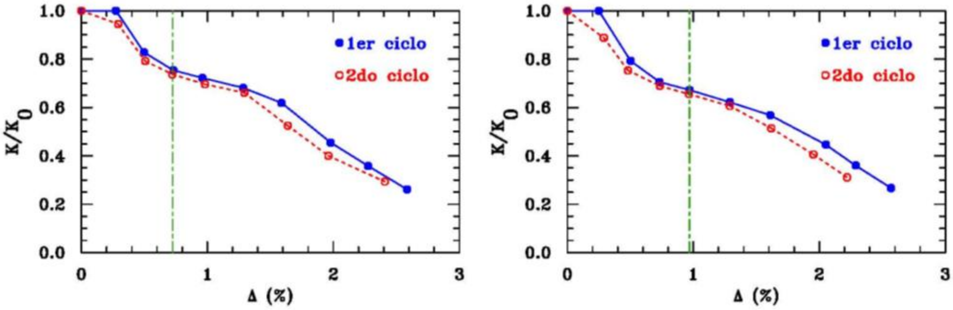
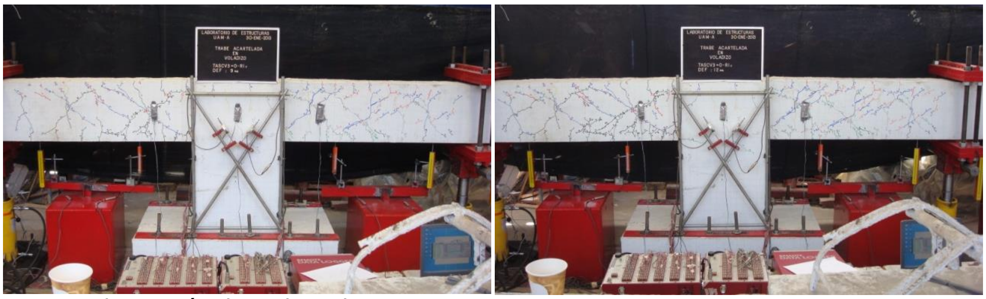


Figura 22 Curvas de rigidez secante efectiva (o de degradación de rigidez) para el espécimen TASCV3α0-R1-c (prismático) en condición de continuidad y ensayado ante carga cíclica. Las curvas de la izquierda corresponden a la viga izquierda y la de la derecha a la viga derecha



a) Patrón de agrietamiento a Δ=0.73%

b) Patrón de agrietamiento a Δ=0.97%

Figura 23 Patrones de agrietamiento obtenidos para el espécimen TASCV3α0-R1-c (prismática) a una distorsión cercana a la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal en cada extremo (derecho e izquierdo) durante en ensaye ante cargas cíclicas aplicadas en el centro del claro de las vigas

Con base en los resultados experimentales aquí expuestos, discutidos y documentados con fotos del daño asociado a la rigideces secantes efectivas a la primera fluencia del acero de refuerzo, es por lo que el autor está convencido que las recomendaciones sobre el cálculo de rigideces efectivas para el diseño de elementos de concreto, principalmente vigas, son incorrectas y bastante desafortunadas, como se discute en la siguiente sección.

3.5 Disposiciones vigentes de normas de concreto reforzado

Aunque las disposiciones para la definición de secciones efectivas en elementos de concreto reforzado aparecieron por primera vez en una norma modelo en el reglamento ACI-318, al autor le preocupa enormemente que estén también en las normas de concreto de su país y, por ello, se concentra en lo que aparece en el texto de estas normas exclusivamente en este trabajo y discutirlas, con base en lo expuesto anteriormente.

En las NTCC-04 (2004) se establece lo siguiente, en su acápite 1.4.1:

> "Cuando se apliquen métodos de análisis elástico, en el cálculo de las rigideces de los miembros estructurales se tomará en cuenta el efecto del agrietamiento. Se admitirá que se cumple con este requisito si las rigideces de vigas y muros agrietados se calculan con la mitad del momento de inercia de la sección bruta de concreto ($0.5I_g$), y si las rigideces de columnas y muros no agrietados se calculan con el momento de inercia total de la sección bruta de concreto. En vigas T, la sección bruta incluirá los anchos de patín especificados en la sección 2.2.3."

Como se entiende de la lectura de este texto, en él se establece que es una obligación tomar en cuenta el agrietamiento para calcular rigideces de los elementos estructurales y que, en el caso de vigas, esto podrá hacerse considerando una inercia efectiva del 50% la inercia de la sección bruta del concreto (I_{ef}=0.5I_g). Esto involucra, obviamente, a todas las vigas de una estructura de interés. Ciertamente, con los resultados anteriormente expuestos y discutidos, no estamos a favor de esta disposición copiada, sin mucha meditación, del reglamento ACI-318 de 2002, más cuando los desplazamientos de estos análisis elásticos se deben de multiplicar por el factor de comportamiento sísmico *Q* (ductilidad) según el cuerpo principal de las NTCS-04 (Figura 6a) y por *QR* (factores de ductilidad y sobrerresistencia) de acuerdo con el Apéndice A de las NTCS-04.

En las nuevas NTCC-17 (2017) se establece lo siguiente, en su acápite 3.2.1 (análisis lineal):

> "Cuando se apliquen métodos de análisis lineal, en el cálculo de las rigideces de los miembros estructurales se tomará en cuenta el efecto del agrietamiento. Se admitirá que se cumple con este requisito si las rigideces de los elementos se calculan con el módulo de elasticidad del concreto, E_c, y con los momentos de inercia de la tabla 3.2.1."

Por claridad en la exposición, la tabla 3.2.1 de las NTCC-17 (2017) se reproduce en la Tabla 3. Como se aprecia, se insiste en que, para fines de análisis elástico, todas las vigas se consideren agrietadas y con una rigidez efectiva del 50%.

Tabla 3 Momentos de inercia para cálculo de rigideces (Tabla 3.2.1 de las NTCC-17 2017)

Elemento	Momento de Inercia
Vigas y muros agrietados[1]	$0.5I_g$
Columnas agrietadas	$0.7I_g$
Columnas y muros no agrietados	I_g

[1] En vigas T se deberán incluir los anchos de patín especificados en el inciso 5.1.1.2

Como ya se discutió antes, no sólo no tiene sentido que sea tan baja la rigidez efectiva como el 50%, sino que tampoco se reflexiona mucho que, conforme a las normas de diseño por sismo, las distorsiones de entrepiso obtenidas del análisis elástico lineal equivalente se deben multiplicar por *QR*, y que el valor propuesto como "equivalente" corresponde en realidad a una rigidez secante efectiva para todo el elemento, asociada ya a un daño extenso y extendido, no a un comportamiento sensiblemente elástico. Sin duda, ésta es una disposición que parte de una mala interpretación y extrapolación de los resultados presentados por Hage y MacGregor (1974), y que ignora el pequeño detalle que, salvo un inventario mínimo de estructuras, pocas afrontarán al sismo de diseño inmediatamente

después de terminar su construcción o estar en pleno proceso constructivo, por lo que sus vigas ante cargas gravitacionales en servicios permanecerán mayoritariamente (sino totalmente) elásticas antes de la ocurrencia del sismo.

3.6 Propuesta racional para cálculo de rigideces efectivas

Enfatizando nuevamente que el autor no está a favor del cálculo de inercias efectivas para el diseño sismorresistente integral de estructuras de concreto reforzado por todos los razonamientos expuestos, supongamos, sin conceder, que sí es probable que en ciertos casos especiales algunas cuantas vigas de concreto reforzado bien diseñadas para fallar dúctilmente a flexión ante combinaciones de cargas verticales y laterales, presenten agrietamientos incipientes ante la acción de las cargas verticales y acciones accidentales frecuentes (vientos y/o sismos de pequeña magnitud) antes de la acción de un sismo de gran magnitud. En ese caso, las regiones críticas serían, sin duda: a) los extremos de las vigas donde se desarrollarían las articulaciones plásticas en un estado de prevención de colapso y, b) en algunos casos, en la zona cercana al centro del claro, cuando dominen en el diseño las cargas gravitacionales. Por lo tanto, las posibles regiones de agrietamiento por flexión de una trabe prismática en estas condiciones se ilustran en la Figura 24 y se supone, que en el caso más general, estas secciones serán, seguramente, de distinta longitud.

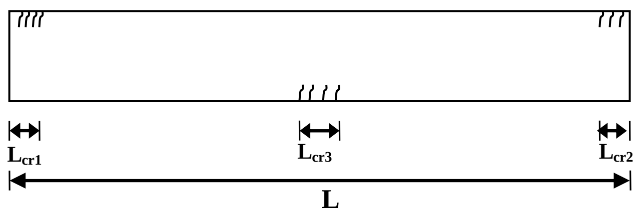


Figura 24 Secciones de potencial agrietamiento en una viga prismática continua bien diseñada para fallar dúctilmente a flexión

Si como una simplificación adicional, se supone que la viga forma parte de un edificio en una zona fuertemente sísmica, por lo que los momentos ante carga lateral por sismo son bastante mayores a los de cargas gravitacionales y, por ello, el diseño se rige por las combinaciones con sismo, que como consecuencia se obtienen mayores peraltes y armados que si en el diseño rigieran cargas verticales, entonces el agrietamiento en la zona central de la viga por cargas gravitacionales pudiera despreciarse, por lo que la sección efectiva de diseño sería la mostrada en la Figura 25, donde además se presenta la idealización de la viga continua con fines de rigidez. Si para fines prácticos se supone que el armado en ambos extremos de la viga es simétrico y, por ello, la inercia agrietada efectiva (I_{cr}) y la longitud de agrietamiento (L_{cr}) en esa zona es similar en ambos extremos, y se supone que la sección de concreto reforzado es homogénea también, entonces se puede estimar la rigidez efectiva a flexión del elemento por integración, empleando cualquier procedimiento válido en elementos finitos (por ejemplo, Bathe 1982, Zienkiewicz y Taylor 1991) o en análisis estructural tradicional (por ejemplo, Tena 2007).

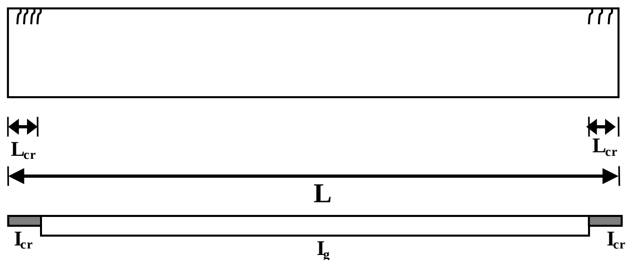


Figura 25 Secciones de potencial agrietamiento en una viga prismática continua bien diseñada para fallar dúctilmente a flexión en una zona altamente sísmica y una consideración simplista y aproximada de las inercias efectivas para fines de análisis

Empleando el método de las flexibilidades, integrando e invirtiendo la matriz de flexibilidad para obtener los coeficientes de rigidez a flexión (por ejemplo, Tena 2007), si se desprecian las deformaciones por cortante se obtiene, suponiendo que el módulo de elasticidad del concreto (E_c) es constante a lo largo y ancho de todo el elemento, que el momento de inercia efectivo equivalente para toda la viga (I_{ef}), se puede aproximar bajo estas hipótesis como:

$$I_{ef} = I_g\left(\frac{A}{4AB-3B^2}\right) \tag{3}$$

$$A = 1+\left(\frac{I_g}{I_{cr}}-1\right)\left(2\left(\frac{L_{cr}}{L}\right)^3-3\left(\frac{L_{cr}}{L}\right)^2+3\frac{L_{cr}}{L}\right) \tag{4}$$

$$B = 1+2\frac{L_{cr}}{L}\left(\frac{I_g}{I_{cr}}-1\right) \tag{5}$$

donde I_{cr} es el momento de inercia de la sección agrietada y L_{cr} es la longitud supuesta donde ocurrirá este agrietamiento en los extremos de las vigas.

Si se consideran las deformaciones por cortante, la expresión para el coeficiente A tiene un término adicional para tomar en cuenta dicha deformación incluyendo a las secciones agrietadas, por lo que, en este caso sería:

$$A = 1+\left(\frac{I_g}{I_{cr}}-1\right)\left(2\left(\frac{L_{cr}}{L}\right)^3-3\left(\frac{L_{cr}}{L}\right)^2+3\frac{L_{cr}}{L}\right)+\frac{\Phi}{4}\left(1+2\left(\frac{L_{cr}}{L}\right)\left(\frac{A_{cg}}{A_{ccr}}-1\right)\right) \tag{6}$$

$$\Phi = \frac{12E_cI_g}{G_cA_{cg}L^2} \tag{7}$$

donde Φ, E_c y G_c son respectivamente el coeficiente adimensional de la deformación por cortante, el módulo de elasticidad y el módulo de rigidez a cortante del concreto

bajo un modelado elástico lineal, homogéneo e isotrópico, A_{cg} es el área de cortante de la sección gruesa y A_{ccr} es el área de cortante efectiva de la sección agrietada.

Entonces, ahora sí, para calcular I_{cr} se pueden aprovechar las expresiones de Khuntia y Gosh (2004a) o lo desarrollado recientemente por Godínez *et al.* (2017 y 2018), pues están considerando una rebanada infinitesimal o sección transversal del elemento, u otras propuestas que se estimen razonables.

Definir la longitud de agrietamiento no es un asunto simple, pero uno debiera suponer que si la viga está bien diseñada a flexión, entonces no debiera exceder la longitud donde se desarrollará la articulación plástica (l_p). Por lo tanto, suponer que $L_{cr}=l_p$ pudiera ser conservador, pues subestimaría la rigidez del elemento. Existen desde hace décadas propuestas empíricas disponibles en la literatura para estimar la longitud de la articulación plástica en elementos de concreto reforzado, varias de las cuales se presentan en textos clásicos para el diseño de estructuras de concreto reforzado (por ejemplo, Park y Paulay 1983) y en revisiones y actualizaciones presentadas en trabajos más recientes (Mendis 2001, Bae y Bayrak 2008), donde la longitud de la articulación plástica depende de muchos parámetros, pero para fines prácticos estas longitudes estimadas con fórmulas empíricas varían en el siguiente intervalo para vigas y columnas dependiendo de la carga axial (Bae y Bayrak 2008): $0.25h \leq l_p \leq 1.5h$, donde h es el peralte del elemento. Sin embargo, para vigas es más común que la longitud de la articulación plástica esté más cercana a $l_p=0.5h$ (Mendis 2001). De hecho, Bazán y Meli (1999) comentan que la longitud de la articulación plástica que se forma en un empotramiento se puede estimar conservadoramente como la mitad del peralte de la viga ($l_p=0.5h$).

Por lo tanto, para ilustrar el impacto de considerar el agrietamiento en vigas de una manera práctica, pero más racional, supongamos lo siguiente, que de entrada, será demasiado conservador: a) se desprecian las deformaciones por cortante, por ser poco significativas en vigas bien proporcionadas, b) tres longitudes de agrietamiento L_{cr}: $L_{cr}=0.25h$, $L_{cr}=0.5h$ y $L_{cr}=0.75h$ y, c) tres rigideces efectivas para la sección transversal considerando el agrietamiento: $I_{cr}=0.35I_g$, $I_{cr}=0.5I_g$ e $I_{cr}=0.7I_g$, que coincide con las propuestas actuales para vigas y columnas del ACI 318-14 (2014) y las NTCC-17 (2017) y, como ya se comentó, son excesivamente conservadoras también, pues se considera que la grieta atraviesa toda la sección transversal del elemento, sólo cierto en grietas de gran espesor. Las curvas obtenidas (nueve combinaciones distintas) para las distintas relaciones claro-peralte consideradas, se muestran en la Figura 26. Como se espera, la inercia efectiva aumenta a medida que: a) el claro efectivo de la viga (L/h) aumenta, b) la inercia de la sección agrietada (I_{cr}) aumenta y, c) la longitud de agrietamiento (L_{cr}) disminuye.

El caso más representativo y conservador para una viga estaría dado por la curva donde $I_{cr}=0.5I_g$ y $L_{cr}=0.5h$, y para esta curva se observa que la rigidez efectiva más baja es 71.2% de la inercia gruesa para la relación de aspecto más baja que permiten las NTCC-04 y NTCC-17 para el diseño de una viga a flexión ($L/h=5$), pero si la viga está bien proporcionada ($L/h>9$), entonces es igual o mayor al 80.3%. Si uno considera que la longitud de agrietamiento es menor ($L_h=0.25h$), que sería mucho más representativa de un agrietamiento casual de una viga bien diseñada, la rigidez efectiva para vigas bien proporcionadas ($L/h>9$) es mayor al 88.5% la inercia de la sección gruesa. Cabe hacer la pregunta, ¿vale la pena entonces considerar este potencial agrietamiento en las vigas, para fines de análisis elástico,

más que después se solicitan multiplicar los desplazamientos resultantes por *QR*? La opinión del autor es que esto es una complicación innecesaria, y que confunde más al ingeniero promedio que aportarle conocimiento valioso.

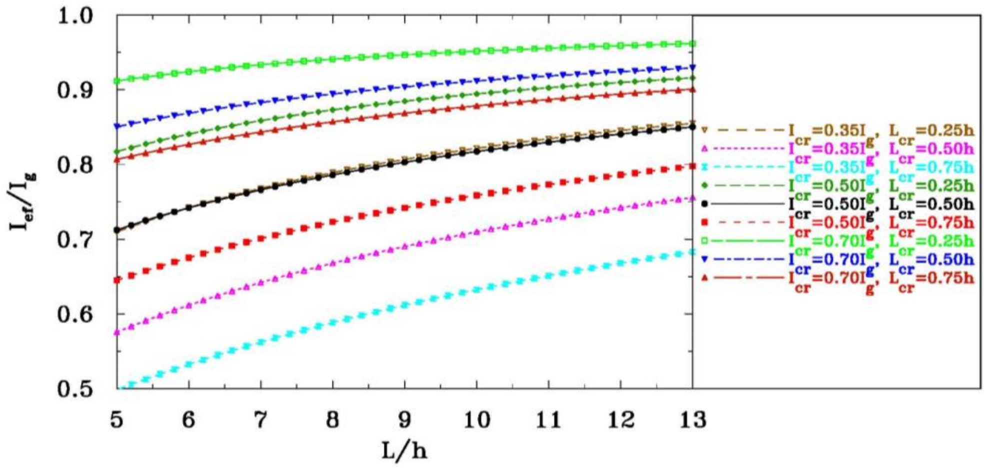


Figura 26 Variación de la inercia efectiva para vigas prismáticas para distintas hipótesis de la inercia agrietada efectiva de la sección transversal (I_{cr}) y la extensión de la longitud de agrietamiento (L_{cr}) en los extremos de la viga

Finalmente, en las investigaciones relacionadas con el diseño sismorresistente se debería enfatizar y promover medios racionales para evitar el agrietamiento y el daño de los elementos estructurales principales, más que promoverlo, si en realidad lo importante en nuestro trabajo es "controlar al daño estructural" para proteger a las estructuras, a la gente y su principal patrimonio, como tanto les gusta pregonar a muchísimos colegas.

4 COMENTARIOS FINALES

En el presente trabajo se discute ampliamente el por qué la rigidez de cualquier elemento estructural depende principalmente de su forma (prismática o de sección variable), de su longitud, de sus condiciones de apoyo y de sus propiedades mecánicas en función de las relaciones constitutivas que se supone que, para fines prácticos, satisface el material con que está hecho. Por ello, la rigidez de cualquier elemento estructural se obtiene a partir de integrar todas estas propiedades a lo largo del elemento y en todo su volumen.

Por ello, el autor discute y reflexiona de manera integral, apoyado tanto en resultados analíticos, como en evidencia experimental, el por qué considera desafortunado el que a partir de los primeros años del presente milenio, en las principales normas y recomendaciones para el diseño de estructuras de concreto reforzado, se promueva el empleo de secciones "efectivas", donde la inercia promedio de las vigas es de 50% o menos de la inercia de la sección gruesa, debido al "agrietamiento" asociado a la primera fluencia del refuerzo longitudinal.

Se demuestra a partir de ensayes experimentales que las rigideces efectivas asociadas a la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal son muy

superiores al 50%, aun en elementos diseñados para fallar a cortante (por estudiarse ese mecanismo resistente), y que el patrón de daño asociado es muy evidente, por lo que dichos agrietamientos no pasarían inadvertidos en una estructura en condiciones de servicio, antes o después de un sismo, no solamente por parte de ingenieros especialistas, sino por parte de gente común.

También se comenta e ilustra con fotografías el hecho que es común que después de un sismo intenso, en edificios donde se observa amplio daño en los muros diafragma ("infill walls") y en los muros no estructurales de mampostería, en muchas ocasiones no se presentan daños (grietas visibles o incluso fisuras) en las vigas, o cuando mucho sólo se presentan en unas cuantas vigas, no de manera generalizada en todos los niveles en todos los marcos resistentes.

Se demuestra también que aún para modelos de edificios diseñados conforme a los lineamientos de reglamentos de resistencia última y del estado límite de prevención de colapso y para la distorsión (deriva) de entrepiso máxima permitida por los reglamentos, a partir de simulaciones mediante análisis dinámicos paso a paso no lineales ante la acción de registros de aceleración congruentes con el espectro de diseño sísmico, se aprecia claramente que, ante este escenario crítico, ni responden inelásticamente todas las vigas, ni todas las vigas tipo que responden inelásticamente desarrollan las mismas intensidades de rotaciones inelásticas.

Entre otros razonamientos, estos son por los cuales el autor no cree en el cálculo de rigideces efectivas en vigas y columnas de estructuras de concreto para fines de análisis y diseño sísmico, y menos en la recomendación de tomar el 50% de la inercia de la sección gruesa para todos los elementos en toda la altura del edificio. Le parece una extrapolación exagerada y poco razonada, a partir de los resultados de un excelente estudio que se desarrolló con otros fines, para determinar la rigidez efectiva secante de una viga aislada a un daño muy importante, asociada a la acción extrema de diseño, es decir, representativa del agrietamiento y daño después de la ocurrencia del sismo, no antes de que éste se presente.

De esta manera, para fines de diseño sismorresistente, esa rigidez secante corresponde a secciones de vigas muy agrietadas y se debería tomar para estimar o calcular directamente los desplazamientos últimos, más si se propone considerar, de manera poco realista, que todas las vigas del edificio están así de fuertemente agrietadas en planta y en elevación. En el caso de los reglamentos de diseño sísmico de México, los desplazamientos serían los calculados con el análisis elástico equivalente ante fuerzas reducidas, pero sin multiplicar por el factor Q (C_d en los reglamentos de diseño sísmico de los Estados Unidos), y sería una aproximación muy inexacta de estos desplazamientos, como lo discute el autor con detalle en otros textos (Tena *et al.* 2012). Sin embargo, de manera muy lamentable y miope, conforme al reglamento de la Ciudad de México, aun considerando inercias efectivas, en el diseño sismorresistente de estructuras se deben calcular los desplazamientos últimos multiplicando los obtenidos en el análisis elástico por Q, lo cual es un cálculo aproximado y muy incorrecto.

Por otra parte, desde el punto de vista de diseño sismorresistente, el considerar secciones agrietadas no necesariamente lidera a un diseño más seguro o conservador, pues esto va a depender a qué parte del espectro de diseño sísmico conduzca el alargamiento del periodo fundamental de vibrar, dependiendo de las

características de la estructura en cuestión. Para estructuras cuyo periodo elástico (T_e) esté dentro de la rama ascendente del espectro de diseño, considerar secciones agrietadas (T_{cr}) liderará a que la estructura sea diseñada con fuerzas mayores y, en este caso, ese diseño pudiera ser conservador. En cambio, si el periodo elástico se encuentra en la parte final de la meseta o en la rama descendente del espectro, el considerar secciones agrietadas llevará a que la estructura se diseñe con fuerzas menores a las que estará sujeta de inicio y, en estos casos, ese diseño pudiera ser no conservador.

No obstante que el autor considera poco realista e innecesario el incluir secciones efectivas para tomar en cuenta agrietamientos en el diseño sismorresistente de estructuras de concreto reforzado en zonas donde el diseño lo rigen las cargas accidentales por sismo, se presentan ecuaciones simplificadas, pero racionales, que el autor desarrolló a partir de sólidos fundamentos del análisis estructural, en caso de que algunos ingenieros deseen tomar rigideces efectivas en secciones de concreto, si se considera que puede ocurrir algún tipo de agrietamiento (no detectado a simple vista) antes de que se presente un sismo intenso asociado a su diseño o para casos donde estos agrietamientos se hayan observado después de la inspección y evaluación de un edificio existente.

Por otra parte, no deja de ser curioso que la mayor fuente de incertidumbre en la estimación de la rigidez inicial de los elementos de concreto reforzado, que es la importante variabilidad de su módulo de elasticidad, sea poco comentada en muchas normas de diseño de estructuras de concreto. El autor también reflexiona brevemente en este artículo sobre la enorme importancia de este tema, pues los ingenieros si deberían evaluar su impacto en la estimación de los desplazamientos laterales y propiedades dinámicas, además de especificar claramente en planos qué tipo de agregado grueso se debe emplear en la mezcla de concreto conforme a la constante del módulo de elasticidad en que se basan sus análisis y diseños.

El autor también quiere recordarles a los ingenieros estructuristas que les gusta promover el agrietamiento y el daño severo (pero controlado) en aras de obtener estructuras “más económicas” que, en un edificio estándar, el costo de la estructura oscila entre 20% y 30% del costo total del edificio, pues los mayores costos iniciales están asociados a las instalaciones y a los acabados (por ejemplo, Charette y Marshall 1999). El autor se pregunta entonces, ¿valdrá la pena ahorrarle al inversionista hasta un 5% e incluso hasta un 10% del costo total de la estructura diseñándola con el objetivo de llevarla al mayor daño posible ante un sismo intenso, que diseñarla para un 10%-15% más cara, pero limitando el objetivo de diseño a un daño fácilmente reparable?

Finalmente, el autor es de la opinión que en las investigaciones relacionadas con el diseño sismorresistente, se debería enfatizar y promover medios racionales para evitar el agrietamiento y el daño severo de los elementos estructurales principales de concreto reforzado, más que promoverlos con planteamientos como el de las “secciones efectivas”, si en realidad lo importante en nuestro trabajo y nuestro compromiso con la sociedad es “controlar al daño estructural”, para proteger a las estructuras, a la gente y a su principal patrimonio.

5 AGRADECIMIENTOS

En este artículo el autor presenta resultados analíticos y experimentales que se han generado durante el desarrollo de las tesis de grado que ha dirigido previamente a muchos de sus alumnos, que no incluye en esta ocasión como coautores del mismo por ser este un trabajo donde presenta una opinión muy crítica y personal, pero que quiere reconocerles sinceramente su gran lealtad, dedicación, esfuerzo y apoyo. Por ello, agradece a los doctores Hans I. Archundia y Eber Godínez, a los maestros Luis A. Urbina, Alejandro Grande, José Luis Luna, Héctor Correa, Gonzalo Gatica y Alberto Sánchez, y a los ingenieros Fernando Casales, Octavio Rodríguez, Edznab López y Luis Victoria. También agradece a su colega, el Dr. Gelacio Juárez, su colaboración en los modelos no lineales en Ansys de las trabes de concreto reforzado que se discuten.

REFERENCIAS

1. Abaqus (1989), "Abaqus user´s manual, version 4.8", Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc.
2. ACI 318-02 (2002), *Building code requirements for structural concrete (ACI-318-02) and commentary*, Farmington Hills. (MI, USA) American Concrete Institute.
3. ACI 318-14 (2014), *Building code requirements for structural concrete (ACI-318-14) and commentary*, Farmington Hills. (MI, USA) American Concrete Institute.
4. Archundia, H. I. (2004), "Comportamiento a cortante de trabes acarteladas de concreto reforzado ante carga estática", *Tesis de Maestría*, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, mayo.
5. Archundia, H. I, A. Tena y O. M. González (2006), "Mecanismos de resistencia y deformación a cortante de trabes acarteladas de concreto reforzado", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, Vol. 11, No. 1, pp. 1-23.
6. Archundia, H. I. (2013), "Recomendaciones de diseño a cortante para trabes acarteladas de concreto reforzado", *Tesis de Doctorado*, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, diciembre.
7. Archundia-Aranda, H. I., A. Tena-Colunga y A. Grande-Vega (2013), "Behavior of reinforced concrete haunched beams subjected to cyclic shear loading", *Engineering Structures*, Vol. 49, pp. 27-42, http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.10.037.
8. Bae, S. y O. Bayrak (2008), "Plastic hinge length of reinforced concrete columns", *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No. 3, pp. 290-300.
9. Bathe, K.-J. (1982), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, primera edición, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey.
10. Bazán, E. y R. Meli (1999), *Diseño sísmico de edificios*, Limusa, México.
11. Bazant, Z. P. (1983), "Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, No. 3, pp. 849-865.

12. Casales, L. F., O. Rodríguez y A. Sánchez (2002), "Comportamiento experimental a cortante de trabes acarteladas de concreto reforzado", *Proyectos Terminales I y II*, Departamento de Materiales, Universidad Autónoma Metropolitana, diciembre.
13. Charette, R. P. y H. E. Marshall (1999), "Uniformat II elemental classification for building specifications, cost estimating and cost analysis", *NISTIR 6389*, National Institute of Standards and Technology, U. S. Department of Commerce, October.
14. Cook, R. D. y W. C. Young (1985), *Advanced Mechanics of Materials*, primera edición, Macmillan Publishing Company, Nueva York.
15. CSI (2005), "CSI analysis reference manual for SAP2000, ETABS, SAFE and CSiBridge", *Computers and Structures Inc*., Estados Unidos, marzo.
16. Elwood, K. J. y M. O. Eberhard (2009), "Effective stiffness of reinforced concrete columns", *ACI Structural Journal*, Vol. 106, No. 4, pp. 476-484.
17. Furlong, R. W. y P. M. Ferguson (1966), "Tests of frames with columns in single curvature," *Reinforced Concrete Columns, SP-13*, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, pp. 55-73.
18. García, S. (1988), "El comportamiento elástico del concreto y su interpretación a través del módulo de elasticidad", *Tesis de Licenciatura*, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
19. Gatica, G. (2007), "Importancia del diseño del sistema de piso en edificios con base en marcos dúctiles diseñados conforme al reglamento del Distrito Federal", *Tesis de Maestría*, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, octubre.
20. Godínez-Domínguez, E. A., A. Tena-Colunga y L. E. Pérez-Rocha (2012), "Case studies on the seismic behavior of reinforced concrete chevron braced framed buildings", *Engineering Structures*, Vol. 45, No 12, pp. 78-103, http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.05.005.
21. Godínez-Domínguez, E. A., A. Tena-Colunga y G. Juárez-Luna (2015), "Nonlinear finite element modeling of reinforced concrete haunched beams designed to develop a shear failure", *Engineering Structures*, Vol. 105, pp. 99-122, http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.09.023.
22. Godínez-Domínguez, E. A. y A. Tena-Colunga (2019), "Behavior of ductile steel X-braced RC frames in seismic zones", aceptado para publicación en *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*.
23. Godínez, E. A., A. Tena y L. E. Pérez (2012), "Comportamiento sísmico de edificios con base en marcos dúctiles de concreto reforzado con contraventeo chevrón", *Revista de Ingeniería Sísmica*, No. 86, pp. 55-87, enero-junio, https://doi.org/10.18867/ris.86.153.
24. Godínez, E. A., A. Tena y G. Juárez (2013), "Análisis numérico de trabes acarteladas de concreto reforzado diseñadas para presentar una falla por cortante", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, Vol. 18, No. 1, pp. 69-102.
25. Godínez, E. A., I. Velázquez, R. E. Silvestre y A. Tena (2018), "Influencia de diferentes variables en la determinación de rigideces efectivas de secciones de concreto reforzado sujetas a flexión", *Memorias, XXI Congreso Nacional*

de Ingeniería Estructural, Campeche, Campeche, Artículo 02-27, pp. 1-28, noviembre.

26. Grande, A. (2009), "Mecanismos de resistencia y deformación a cortante de trabes acarteladas de concreto reforzado sujetas a cargas cíclicas", *Tesis de Maestría*, Posgrado en Ingeniería Estructural, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, julio.
27. Hage, S. E. y J. G. MacGregor (1974), "Second order analysis of reinforced concrete frames", *Structural Engineering Report No. 9*, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Canada, October.
28. Khuntia, M. y S. K. Ghosh (2004a), "Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: analytical approach", *ACI Structural Journal*, Vol. 101, No. 3, pp. 351-363.
29. Khuntia, M. y S. K. Ghosh (2004b), "Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: Experimental verification", *ACI Structural Journal*, Vol. 101, No. 3, pp. 364-374.
30. Lim, J. C. y T. Ozbakkaloglu (2014), "Stress–strain model for normal- and light-weight concretes under uniaxial and triaxial compression", *Construction and Building Materials*, Vol. 71, pp. 492-509. http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.08.050.
31. MacGregor, J. G. (1993), "Design of slender concrete columns-revisited", *ACI Structural Journal*, Vol. 90, No. 3, pp. 302-309.
32. Mendis, P. (2001), "Plastic hinge lengths of normal and high-strength concrete in flexure", *Advances in Structural Engineering*, Vol. 4, No. 4, pp. 189-195.
33. Neville, A. M. (1963), *Properties of Concrete*, primera edición, Sir Isaac Pitman & Son Ltd., London, Great Britain.
34. NTCC-87 (1987), "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", *Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal*, noviembre.
35. NTCC-96 (1996), "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", *Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal*, febrero.
36. NTCC-04 (2004), "Normas Técnicas Complementarias para diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, octubre.
37. NTCC-17 (2017), "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", *Gaceta Oficial de la Ciudad de México*, No. 220-BIS, diciembre.
38. NTCS-04 (2004), "Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo", *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, octubre.
39. Park, R. y T. Paulay (1983), *Estructuras de concreto reforzado*, segunda reimpresión, Limusa, México.
40. Przemieniecki, J. S. (1985), *Theory of matrix structural analysis*, Dover Publications Inc., Nueva York.

41. Ramtani, S., Y. Berthaud y J. Mazars (1992), "Orthotropic behavior of concrete with directional aspects: modeling and experiments", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 133, pp. 97-111.
42. Rashid, Y. K. (1968), "Ultimate strength analysis prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Engineering And Design*, Vol. 7, pp. 334-344.
43. Rots, J. G. (1988), "Computational model of concrete fracture", *TR Dissertation 1663*, Technische Universiteit Delft.
44. Selby, R. G. y F. J. Vecchio (1997), "A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 24, pp. 460-470.
45. Tena-Colunga, A., H. Correa-Arizmendi, J. L. Luna-Arroyo y G. Gatica-Avilés (2008a), "Seismic behavior of code-designed medium rise special moment-resisting frame RC buildings in soft soils of Mexico City", *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 12, pp. 3681-3707, https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.05.026.
46. Tena-Colunga, A., H. I. Archundia-Aranda y O. M. González-Cuevas (2008b), "Behavior of reinforced concrete haunched beams subjected to static shear loading", *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 2, pp. 478-492. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.04.017.
47. Tena-Colunga, A. (2010), "Review of the soft first story irregularity condition of buildings for seismic design", *The Open Civil Engineering Journal*, Vol. 4, pp. 1-15, doi:10.2174/1874149501004010001.
48. Tena-Colunga, A., L. A. Urbina-Californias y H. I. Archundia-Aranda (2017), "Cyclic behavior of continuous reinforced concrete haunched beams with transverse reinforcement designed to fail in shear", *Construction and Building Materials*, Vol. 151, pp. 546-562, http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.05.123.
49. Tena, A. y E. del Valle (1996), "Impresiones sobre el comportamiento de estructuras de la ciudad de Manzanillo ante el sismo del 9 de octubre de 1995", *Memorias, X Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, Mérida, Yucatán, Vol. I, pp. 433-443, noviembre.
50. Tena, A., E. del Valle, S. M. Alcocer, R. Berrón, J. L. Camba, O. de la Torre, F. García, O. López, E. Martínez, E. Miranda, V. M. Pavón y A. Terán (1997), "Capítulo 11: Edificios", *El macrosismo de Manzanillo del 9 de octubre de 1995*, Arturo Tena Colunga, editor, Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica y Universidad de Colima, primera edición, octubre, ISBN 968-6190-83-X, pp. 268-324.
51. Tena, A. (2007), *Análisis de estructuras con métodos matriciales*, primera edición, Limusa, México, ISBN-13:978-968-18-6980-9.
52. Tena, A. y H. Correa (2008), "Evaluación de los criterios de diseño por sismo del RCDF para marcos dúctiles de concreto reforzado", *Revista de Ingeniería Sísmica*, No. 78, pp. 73-101, https://doi.org/10.18867/ris.78.24.
53. Tena, A. (2011), "Capítulo 1. Los otros sismos del año 1995. Enseñanzas principales del macrosismo de Manzanillo del 9 de octubre de 1995" *El Sismo de Villaflores, Chiapas, sus Realidades y Consecuencias*, Raúl González Herrera, Coordinador, Colección Jaguar, Universidad de Ciencias y Artes de Chiapas, ISBN 978-607-7510-72-7, pp. 19-83.

54. Tena, A., G. Gatica, L. A. Urbina y L. Victoria (2012), "Impacto de la disposición de vigas secundarias en losas perimetralmente apoyadas en el comportamiento sísmico de edificios diseñados con base en marcos de concreto reforzado", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, Vol. 17, No. 1 y 2, pp. 63-85.

55. Tena, A., G. Juárez, M. E. Ruiz Sandoval y H. I. Archundia (2017a), "Revisión de la seguridad sísmica de un edificio de concreto reforzado de mediana altura fuertemente irregular existente en la Ciudad de México", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, Vol. 22, No. 3, pp. 281-326.

56. Tena, A., L. A. Urbina y H. I. Archundia (2017b), "Trabes acarteladas de concreto reforzado continuas diseñadas para fallar por cortante. Parte 1: descripción de los experimentos y del comportamiento cíclico", *Revista de Ingeniería Sísmica*, No. 97, pp. 1-34, https://doi.org/10.18867/ris.97.451.

57. Urbina, L. A. (2013), "Comportamiento a cortante de trabes acarteladas continuas de concreto reforzado sujetas a cargas cíclicas", *Tesis de Maestría*, Posgrado en Ingeniería Estructural, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, diciembre.

58. Vecchio, F. J. (2000), "Disturbed stress field model for reinforced concrete: formulation", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 126, No. 9, pp. 1070-1077.

59. Zienckiewickz, O. C. y R. D. Taylor (1989), *The finite element method. Volume 1: basic formulation and linear problems*, cuarta edición, Mc Graw Hill, Londres.